ÉDOUARD LUCAS

Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 74-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__74_1>

SUR LES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES NOMBRES 5 ET 7;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants résultats contenus dans les précédents Mémoires de M. l'amiral de Jonquières (*Nouvelles Annales*, juin, juillet, septembre, octobre 1878), on trouve la démonstration de cette propriété caractéristique du nombre 5, énoncée par M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, mai 1878, p. 219).

Le nombre 5 est le seul nombre entier décomposable en une somme de deux carrés consécutifs, et dont le carré soit aussi décomposable en une somme de deux carrés consécutifs.

D'autre part, M. Gerono (*) a montré le lien qui rattache ce théorème à l'un ou à l'autre des deux théorèmes suivants, que j'ai énoncés, sans démonstration, dans mes *Recherches sur l'Analyse indéterminée, et sur l'Arithmétique de Diophante* (Moulins, 1873) :

I. *La somme des carrés des x premiers nombres n'est jamais, excepté pour $x = 24$, égale au carré d'un nombre entier.*

II. *Aucun nombre pyramidal ne peut être égal à un carré, en exceptant les deux nombres*

$$\frac{2.3.4}{1.2.3} \quad \text{et} \quad \frac{48.49.50}{1.2.3}.$$

On peut encore rattacher cette propriété caractéristique du nombre 5 à la propriété caractéristique du nombre 7, énoncée par Fermat, et que le savant orientaliste, M. Aristide Marre, vient de retrouver dans les manuscrits de Boulliou (Bullialdus), conservés à la Bibliothèque nationale :

« M. Fermat a envoyé à M. Frénicle la démonstration par laquelle il preuve qu'il n'y a aucun nombre que le seul 7 qui, estant le double d'un quarré — 1, soit la racine d'un quarré de la mesme nature (c'est-à-dire qui soit double d'un quarré — 1).

7 est double du quarré 4, — 1, c'est-à-dire, 8 — 1, et son quarré 49 est le double du quarré 25, — 1, c'est-à-dire 50 — 1. » (*Mss. de Boulliou.*)

En effet, soit le nombre

$$u = 2x^2 - y^2, \quad \text{et} \quad y = \pm 1;$$

(*) *Nouv. Ann.*, 2e serie, t. XVII, p. 381.

on a, en élevant au carré,

$$u^2 = (2x^2 + y^2)^2 - 2(2xy)^2;$$

en multipliant par

$$-1 = 1^2 - 2.1^2,$$

on obtient

$$(1)\qquad u^2 = 2(2x^2 + y^2 - 2xy)^2 - (2x^2 + y^2 - 4xy)^2.$$

Si l'on pose

$$2x^2 + y^2 - 2xy = r, \quad 2x^2 + y^2 - 4xy = \pm 1,$$

on a, puisque $y = \pm 1$,

$$r = (x \pm 1)^2 + x^2,$$

et aussi, d'après l'équation (1),

$$r^2 = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-1}{2}\right)^2;$$

mais u est impair, et, par conséquent, r et r^2 sont les sommes des carrés de deux nombres consécutifs. Donc $r = 5$ et $u = 7$. C. Q. F. D.

Remarque. — En cherchant à résoudre directement le problème de Fermat, on est conduit à poser les deux équations

$$y = 2x^2 - 1,$$
$$y^2 = 2z^2 - 1,$$

d'où l'on tire l'équation biquadratique

$$2x^4 - 2x^2 + 1 = z^2,$$

qu'il est facile de résoudre *complétement* en nombres rationnels, ainsi que nous le montrerons ultérieurement.

On déduit de cette résolution une preuve, plus directe et plus simple, de la proposition de Fermat.