NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Recherches sur deux modes de transformation des figures solides

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 548-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__548_1>

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

1. Désignons par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ les coordonnées d'un point P dans un certain système d'axes, et par X, Y,

Z, T des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z, t.

Désignons de même par $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ les coordonnées d'un point P′ dans un autre système d'axes, et par X′, Y′, Z′, T′ des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z', t'.

Les relations

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ' = \rho TT', \tag{1}$$

dans lesquelles λ, μ, ν, ρ ont des signes quelconques, définissent un mode de transformation des figures tel, qu'à chaque point P de la première figure correspond un point P′ et un seul dans la seconde, et réciproquement.

Mais ces relations ne donnent pas *tous* les modes de transformation où les points se correspondent un à un. En effet, elles ne contiennent que vingt-sept constantes arbitraires. Or les trois relations algébriques les plus générales, qui établissent une correspondance de point à point, contiennent chacune seize termes. On peut, il est vrai, les réduire à quinze termes, en les remplaçant par trois combinaisons éliminatoires. Il reste donc quatorze arbitraires dans chaque relation, en tout quarante-deux arbitraires.

Ainsi, quelque générale que soit la transformation définie par les relations (1), elle est bien loin de représenter toutes les lois qui établissent une correspondance de point à point.

Il n'en est pas de même dans la Géométrie plane, où les relations analogues à la relation (1) contiennent quatorze constantes arbitraires, tout comme les deux relations algébriques les plus générales qui établissent une correspondance de point à point. Là les relations

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ'$$

représentent bien toutes les lois de correspondance de point à point. C'est d'ailleurs ce qu'on peut démontrer par des considérations géométriques (*).

La classification complète des modes de transformation qui, dans l'espace, établissent une correspondance de point à point, paraît difficile à faire. Mais, à défaut de cette classification, il peut y avoir intérêt à étudier les transformations définies par les relations (1); car l'un des principaux objets de la Géométrie contemporaine doit être l'étude des surfaces de degré supérieur au second, et rien ne doit être négligé de ce qui peut aplanir les difficultés de cette étude.

2. Les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ représentent quatre plans. On a donc un tétraèdre ABCD, que l'on peut prendre, au besoin, pour tétraèdre de référence, en supposant les paramètres de référence égaux à l'unité, pour faciliter les interprétations géométriques.

On a dans l'autre figure un autre tétraèdre $A'B'C'D'$, donnant lieu aux mêmes observations. Le sommet A est opposé à la face BCD. Nous dirons par convention que le sommet A est aussi opposé à la face $B'C'D'$. De même, nous dirons que les arêtes AB et $C'D'$ sont opposées.

A tout point d'une arête correspond toute l'arête opposée de l'autre tétraèdre. A tout sommet d'un tétraèdre correspond toute la face opposée de l'autre tétraèdre. A tout plan passant par une arête correspond un plan passant par l'arête de même nom; et, par suite, à toute droite passant par un sommet correspond une droite passant par le sommet de même nom. A tout cône d'ordre m ayant son sommet en A correspond un cône d'ordre $2m$

(*) *Voir* notre travail sur les *Transformations du second ordre dans les figures planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1877) ayant son sommet en A'; et les bases de ces cônes, dans les plans BCD, B'C'D', se correspondent suivant les lois de la Géométrie plane : en particulier, à un plan mené par A correspond un cône du second ordre, contenant les arêtes du tétraèdre qui forment le sommet A'.

3. Théorème I. — *A une surface quelconque d'ordre m prise dans l'une des figures* ABCD *correspond, dans l'autre figure, une surface d'ordre $3m$ ayant les quatre sommets du tétraèdre* A'B'C'D' *pour points d'ordre $2m$.*

En effet, on a une équation homogène d'ordre m entre X, Y, Z, T. En y remplaçant ces quantités par les quantités proportionnelles des relations (1), on a une équation homogène de degré $-m$ entre X', Y', Z', T'; et, en multipliant par $(X', Y', Z', T')^m$, cette dernière équation devient de degré $3m$.

Si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les exposants de X', Y', Z', T' dans cette dernière équation, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et l'on a aussi évidemment

$$\delta \leq m.$$

On conclut de là

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m,$$

ce qui prouve que le sommet D est un point d'ordre $2m$.

Remarque. — Toute surface d'ordre $3m$ ayant quatre points d'ordre $2m$ admet les droites qui les joignent comme lignes d'ordre m.

On a, en effet,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et aussi

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m.$$

On conclut de là l'inégalité

$$\leq m$$

et de même les inégalités analogues. Mais alors, puisque l'on a en même temps

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m$$

et

$$\gamma \leq m,$$

on doit conclure que

$$\alpha + \beta \geq m,$$

ou, en d'autres termes, que la ligne CD fait partie m fois de la surface.

Théorème II. — *Réciproquement, à toute surface d'ordre* $3m$ *ayant les sommets du tétraèdre* $A'B'C'D'$ *pour points multiples d'ordre* $2m$, *correspond une surface d'ordre* m.

En effet, si dans l'équation de la surface d'ordre $3m$ on représente les exposants de X', Y', Z', T' par α, β, γ, δ, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3m$$

et l'on a également

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 2m;$$

on conclut de là l'inégalité

$$\delta \leq m$$

et les analogues.

Ainsi l'équation de la surface donnée est homogène et de degré $3m$ en X', Y', Z', T', et elle contient chaque variable au plus au degré m. Divisant par $(X', Y', Z', T')^m$, on a une équation homogène de degré $-m$ ne contenant les variables qu'en dénominateur. Remplaçant $\frac{1}{X'}$,

$\frac{1}{Y'}$, $\frac{1}{Z'}$, $\frac{1}{T'}$ par les valeurs proportionnelles λX, μY, νZ, ρT, on obtient une équation homogène et de degré m en X, Y, Z, T, qui représente la surface transformée.

Remarque. — Cette réciproque est très-importante. Elle montre que toute surface d'ordre $3m$ ayant quatre points d'ordre $2m$ est la transformée d'une surface d'ordre m, ce qui permet de déduire les propriétés de la première surface de celles de la seconde.

4. Les deux théorèmes qui précèdent se peuvent établir par de pures considérations géométriques.

Nouvelle démonstration du théorème I. — Une arête AB coupe la surface d'ordre m en m points, à chacun desquels correspond l'arête C'D'. Ainsi chaque arête du tétraèdre A'B'C'D' est une ligne d'ordre m de la surface transformée. Soit maintenant une droite PQ rencontrant AB et CD. La transformée de cette droite est évidemment une droite P'Q' qui rencontre A'B' et C'D'. La droite PQ coupe la surface d'ordre m en m points, auxquels correspondent m autres points sur P'Q'. La droite P'Q' contient donc ces m points qui appartiennent à la surface transformée, plus m points de cette surface au point d'intersection de P'Q' et de A'B' et m autres points de cette même surface aux points d'intersection de P'Q' et de C'D'. La surface transformée est donc bien d'ordre $3m$.

D'autre part, à toute droite passant par A correspond une droite passant par A'. La première droite coupe la surface d'ordre m en m points quelconques. La seconde coupe la surface d'ordre $3m$ aux m points correspondants. Donc le point A' est multiple d'ordre $2m$.

Nouvelle démonstration du théorème II. — Le théorème II est un cas particulier d'un autre théorème que nous allons déduire de quelques remarques simples

Si la surface d'ordre m passe α fois par le point A, le plan B′C′D′ fait α fois partie de la transformée : l'ordre de celle-ci s'abaisse donc de α unités, en même temps que l'ordre de multiplicité des points B′, C′, D′. On voit, d'autre part, que l'ordre de multiplicité du point A′ n'est point altéré par cette circonstance. En effet, à une droite AP correspond une droite A′P′. Le nombre des points autres que A où la droite AP coupe la surface d'ordre m est diminué de α unités. Il en est donc de même du nombre des points autres que A′ où la droite A′P′ coupe la transformée. Mais, comme l'ordre de cette transformée diminue aussi de α unités, l'ordre de multiplicité du point A′ demeure invariable. Remarquons enfin, comme dernière conséquence de la circonstance signalée, que l'ordre de multiplicité des lignes droites B′C′, C′D′, B′D′ diminue de α unités.

Examinons une autre circonstance, et supposons que la surface d'ordre m passe par l'arête AB un nombre de fois marqué par le symbole $(\alpha\beta)$. On voit facilement que, dans ce cas, la surface transformée contient l'arête C′D′ $(\alpha\beta)$ fois de plus que si cette circonstance ne se présentait pas.

De l'examen des deux circonstances qui précèdent il résulte que :

Si une surface d'ordre m passe par les sommets A, B, C, D, α, β, γ, δ *fois et par les arêtes* AB, ..., $(\alpha\beta)$, ... *fois, la transformée est d'ordre*

$$3m - \alpha - \beta - \gamma - \delta,$$

les sommets A′, B′, C′, D′ *sont points multiples de* *l'ordre*

$$\alpha' = 2m - \beta - \gamma - \delta,$$
$$\beta' = 2m - \alpha - \gamma - \delta,$$
$$\gamma' = 2m - \alpha - \beta - \delta,$$
$$\delta' = 2m - \alpha - \beta - \gamma,$$

et les arêtes du tétraèdre A′ B′ C′ D′ *sont des lignes de l'ordre*

$$(\alpha'\beta') = m - \gamma - \delta - (\gamma\delta),$$
$$(\alpha'\gamma') = m - \beta - \delta + (\beta\delta),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Le théorème II n'est qu'un cas particulier de celui qui précède. En effet, on sait que, si une surface d'ordre $3m$ possède quatre points d'ordre $2m$, les droites qui joignent ces points sont sur cette surface des lignes d'ordre m.

On a donc à transformer une surface d'ordre $3m$ ayant les sommets d'un tétraèdre pour points d'ordre $2m$ et les arêtes de ce tétraèdre pour lignes d'ordre m. La transformée est d'ordre

$$3(3m) - 2m - 2m - 2m - 2m = m.$$

Les sommets de l'autre tétraèdre sont sur cette transformée des points d'ordre

$$2(3m) - 2m - 2m - 2m = 0;$$

enfin les arêtes de ce même tétraèdre sont des lignes de l'ordre

$$3m - 2m - 2m + m = 0.$$

5. Examinons quelques surfaces particulières.

A un plan quelconque correspond une surface du troisième ordre ayant les sommets du tétraèdre pour points doubles et les arêtes de ce tétraèdre pour lignes simples. Si le plan passe par un sommet, la transformée est un cône du second ordre ayant pour centre le sommet de même nom. Si le plan passe par une arête, la transformée est un plan passant par l'arête de même nom.

A une quadrique quelconque correspond une surface du sixième ordre ayant les quatre sommets du tétraèdre pour points quadruples et les arêtes pour lignes doubles. A une quadrique passant par trois sommets correspond une surface du troisième ordre. A une quadrique circonscrite à l'un des tétraèdres correspond une quadrique circonscrite à l'autre.

6. Dans le cas où les tétraèdres sont semblables et où l'on prend en outre

$$\lambda = \mu = \nu = \rho,$$

les formules de transformation s'écrivent

$$XX' = YY' = ZZ' = TT,$$

et, comme les paramètres de référence sont égaux à l'unité, on voit que les plans correspondants menés par deux arêtes de même nom sont également inclinés sur les plans bissecteurs des dièdres correspondants, mais placés de côtés différents. Il résulte de là que les dièdres ayant pour arêtes les arêtes du tétraèdre se conservent d'une figure à l'autre.

7. Dans les figures solides, comme dans les figures planes, les transformations corrélatives des précédentes donnent des résultats plus intéressants.

Prenons un tétraèdre de référence, avec des paramètres de référence égaux à l'unité. L'équation

$$(2) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

représente un plan en coordonnées tétraédriques.

Si les coefficients P, Q, R, S sont variables et liés par l'équation homogène

$$(3) \qquad f(P, Q, R, S) = 0.$$

Le plan (2) enveloppe une surface V et chacun de ces plans (2) touche cette surface en un point. L'équation (3) suffit évidemment à définir cette surface, et s'appelle son *équation tangentielle*.

Mais l'équation (3) peut être interprétée d'une autre manière. On y peut regarder P, Q, R, S comme les coordonnées tétraédriques d'un point, et alors cette équation (3) représente une surface différente V_1.

Les deux surfaces V et V_1 sont évidemment telles, que l'une d'elles ne peut être connue sans que l'autre le soit, et l'on peut voir sans peine que cette dépendance mutuelle consiste en ceci qu'elles se transforment l'une dans l'autre par polaires réciproques, quand on prend pour directrice une quadrique conjuguée par rapport au tétraèdre de référence et ayant pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0.$$

En effet, le plan polaire d'un point P, Q, R, S de la surface V_1 par rapport à cette quadrique a pour équation l'équation (2), et les coordonnées P, Q, R, S du point considéré sont liées par l'équation (3).

L'enveloppe de ce plan polaire est donc la surface V.

Il résulte de cette remarque qu'il y a toujours deux moyens de trouver l'équation cartésienne d'une surface quand on a son équation tangentielle, et deux moyens aussi pour résoudre le problème inverse.

8. La remarque qui précède donne aussi une solution simple de la plupart des problèmes que l'on peut se poser sur les coordonnées tangentielles.

Nous choisirons comme exemple le problème suivant, dont la solution nous sera utile plus loin.

On donne les équations tangentielles de deux surfaces

$$f(P, Q, R, S) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi(P, Q, R, S) = 0. \tag{5}$$

On demande la condition pour que ces surfaces soient tangentes en un point.

Il faut et il suffit que les surfaces polaires réciproques soient tangentes en un point. Il s'agit donc d'exprimer que les surfaces représentées par les équations (4) et (5) sont tangentes, tout comme si les équations (4) et (5) étaient des équations cartésiennes. Pour cela, on doit joindre aux équations (4) et (5) les équations suivantes :

$$\frac{f'_P}{\varphi'_P} = \frac{f'_Q}{\varphi'_Q} = \frac{f'_R}{\varphi'_R} = \frac{f'_S}{\varphi'_S}. \tag{6}$$

Ces cinq équations n'en valent d'ailleurs que quatre, à cause des propriétés des fonctions homogènes. Éliminant P, Q, R, S entre quatre de ces équations homogènes, on aura la condition cherchée.

On peut donner du problème actuel une solution presque aussi simple que la précédente. Toute solution commune aux équations tangentielles (4) et (5) donne un plan tangent commun aux deux surfaces. Pour l'une d'elles, les coordonnées du point de contact sont fournies par les équations

$$\frac{X}{f'_P} = \frac{Y}{f'_Q} = \frac{Z}{f'_R} = \frac{T}{f'_S}.$$

Pour l'autre point de contact, on a les équations

$$\frac{X}{\varphi'_P} = \frac{Y}{\varphi'_Q} = \frac{Z}{\varphi'_R} = \frac{T}{\varphi'_S}.$$

Il faut et il suffit que ces deux points de contact coïncident, ce qui donne bien les équations (6) à joindre aux équations (4) et (5).

9. Si les paramètres du plan variable

$$(7) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

sont liés par deux équations homogènes

$$(8) \qquad f(P, Q, R, S) = 0,$$

$$(9) \qquad F(P, Q, R, S) = 0,$$

le plan (7) enveloppe une surface développable. Cette développable est d'ailleurs circonscrite aux surfaces représentées respectivement par les équations (8) et (9).

La figure polaire réciproque de cette surface développable, en prenant pour directrice la quartique signalée plus haut, n'est autre chose que la ligne d'intersection des surfaces dont les *équations cartésiennes* sont (8) et (9).

10. Imaginons maintenant un nouveau système d'axes et dans ce système d'axes un nouveau tétraèdre de référence $A'B'C'D'$; puis faisons correspondre un plan de la première figure

$$(10) \qquad PX + QY + RZ + ST = 0$$

à un plan de la seconde

$$(11) \qquad P'X' + Q'Y' + R'Z' + S'T' = 0,$$

par les relations

$$(12) \qquad \lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR' = \rho SS',$$

dans lesquelles λ, μ, ν, ρ ont des signes quelconques.

Il est visible qu'à un plan de chaque figure correspond dans l'autre figure un plan et un seul. Mais les relations (12) ne donnent pas toutes les lois qui établissent une correspondance de plan à plan; car ces relations (12) ne contiennent, explicitement ou implicitement, que vingt-sept constantes arbitraires au lieu de quarante-deux qu'il en faudrait pour les relations algébriques les plus générales établissant une correspondance de plan à plan. On ne s'occupera ici que des transformations définies par les relations (12).

Toute équation homogène

$$f(P, Q, R, S) = 0 \tag{13}$$

a pour conséquence une autre équation

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0; \tag{14}$$

de sorte que, à toute surface enveloppe du plan (10) ayant pour équation tangentielle l'équation (13), correspond une surface enveloppe du plan (11) ayant pour équation tangentielle l'équation (14).

Les classes des surfaces représentées par les équations tangentielles (13) et (14) sont égales aux degrés de ces équations, puisque ces mêmes équations représentent en coordonnées tétraédriques les surfaces polaires réciproques.

Deux équations homogènes simultanées,

$$\left\{\begin{aligned} f(P, Q, R, S) &= 0, \\ F(P, Q, R, S) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ont pour conséquence deux équations homogènes simultanées,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0,\\ &F\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que, à la développable circonscrite aux surfaces dont les équations (15) sont les équations tangentielles, correspond la développable circonscrite aux deux surfaces correspondantes.

A tout plan mené par A correspond le plan B'C'D'; à tout plan mené par AB, un plan mené par C'D'. Lorsqu'un plan tourne autour de AB, le plan correspondant tourne autour de C'D'. Mais, en général, lorsqu'un plan tourne autour d'une droite, le plan correspondant enveloppe une développable de troisième classe; car au plan

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

correspond le plan

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu Q} + \frac{T'}{\rho S} = 0.$$

Or l'hypothèse est que P, Q, R, S sont des fonctions linéaires données d'un paramètre variable K. Il en résulte que l'équation du plan correspondant contient ce même paramètre au troisième degré.

11. Théorème III. — *Une surface quelconque de classe m se transforme, en général, en une surface de classe 3m ayant les quatre faces du tétraèdre pour plans tangents d'ordre 2m.*

La surface V, qui a pour équation

$$f(P, Q, R, S) = 0,$$

se transforme en la surface V′ dont l'équation est

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0.$$

Ces équations, considérées comme des équations cartésiennes, représentent aussi respectivement les surfaces réciproques V_1 et V'_1. Or, la loi de correspondance de ces surfaces V_1 et V'_1 a été étudiée. On a vu que, la surface V_1 étant quelconque et d'ordre m, la surface V'_1 est d'ordre $3m$. D'où l'on doit conclure que, si la surface V est de classe m, la surface V′ est de classe $3m$.

Remarquons en outre que le plan polaire de A′ par rapport à la quadrique directrice

$$X'^2 + X'^2 + Z'^2 + T'^2 = 0$$

n'est autre que B′C′D′ et alors, le point A′ étant, comme on sait, un point d'ordre $2m$ sur la surface V'_1, on doit admettre que le plan B′C′D′ est $2m$ fois tangent à la surface V′.

Théorème IV. — *Réciproquement toute surface de classe $3m$ ayant les quatre faces de l'un des tétraèdres pour plans tangents d'ordre $2m$ se transforme en une surface de classe m.*

On fait la démonstration comme ci-dessus, en considérant les figures réciproqnes.

Remarque. — Ce dernier théorème permet de déduire les propriétés des surfaces de classe $3m$ ayant quatre plans tangents d'ordre $2m$ de celles des surfaces de classe m.

12. On peut donner des deux théorèmes qui précèdent des démonstrations indépendantes de la théorie des polaires réciproques.

Nouvelle démonstration du théorème III. — La surface donnée a pour équation tangentielle

$$(17) \qquad f(P, Q, R, S) = 0.$$

La surface transformée a pour équation tangentielle

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0;$$

si la première équation est de degré m, la seconde est de degré $3m$. Or les degrés des équations marquent précisément les classes des surfaces.

La surface transformée étant de classe $3m$, cherchons combien on peut lui mener de plans tangents parallèles au plan $B'C'D'$. Si l'on peut en mener h distincts de $B'C'D'$, le plan $B'C'D'$ sera un plan tangent d'ordre $3m - h$.

A un plan tangent de la surface (17) ayant pour équation

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

correspond un plan tangent de la surface transformée ayant pour équation

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu R} + \frac{T'}{\rho S} = 0.$$

Exprimons que ce dernier plan est parallèle au plan

$$T' = 0,$$

c'est-à-dire identifions son équation avec l'équation

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' + KT' = 0,$$

A', B', C', D' étant les aires des faces du tétraèdre $A'B'C'D'$.

Nous aurons ainsi

$$\lambda PA' = \mu QB' = \nu RC' = \rho S(D' + K)$$

ou bien

$$\frac{P}{\frac{1}{\lambda A'}} = \frac{Q}{\frac{1}{\mu B'}} = \frac{R}{\frac{1}{\nu C'}} = \frac{S}{\frac{1}{\rho(D' + K)}}.$$

Remplaçant dans l'équation homogène (17) les quantités P, Q, R, S par les quantités proportionnelles, on obtient

$$f\left(\frac{1}{\lambda A'}, \frac{1}{\mu B'}, \frac{1}{\nu C'}, \frac{1}{\rho(D + K)}\right) = 0,$$

ce qui donne, pour K, m valeurs. On peut donc mener à la surface transformée m plans tangents parallèles à chacune des faces du tétraèdre A'B'C'D', ce qui prouve que chacune de ces faces tient lieu de $2m$ plans tangents.

Nouvelle démonstration du théorème IV. — Le théorème IV peut être regardé comme un cas particulier d'un autre théorème que nous allons déduire de quelques remarques simples.

Si une surface de classe m est tangente à la face BCD, tous les plans menés par A' sont tangents à l'autre surface. Donc le point A' fait partie de la surface transformée et la classe de cette dernière s'abaisse d'une unité, ainsi que l'ordre de contact des trois faces qui se coupent en A'.

Il résulte de là que, *si une surface de classe m touche les faces du tétraèdre* ABCD, α, β, γ, δ *fois, la surface transformée a pour classe le nombre*

$$3m - \alpha - \beta - \gamma - \delta$$

et touche les faces du tétraèdre A'B'C'D', α', β', γ', δ' *fois, les nombres* α', β', γ', δ' *étant définis par les égalités suivantes :*

$$\alpha' = 2m - \beta - \gamma - \delta,$$
$$\beta' = 2m - \alpha - \gamma - \delta,$$
$$\gamma' = 2m - \alpha - \beta - \delta,$$
$$\delta' = 2m - \alpha - \beta - \gamma.$$

Le théorème IV n'est qu'un cas particulier de celui qui précède. Il n'y a qu'à remplacer, dans le cas général, m par $3m$ et α, β, γ, δ par $2m$. (*A suivre.*)