Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 525-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__525_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1323

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 383);

PAR M. LIONNET.

Donner toutes les solutions du problème suivant :

Disposer également les neuf premiers nombres 1, 2, 3, ..., 9 *sur les côtés d'un triangle équilatéral, comme l'indique cette figure* $\begin{smallmatrix} & & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \\ & \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{smallmatrix}$, *de façon que les trois sommes des quatre nombres placés sur chaque côté soient égales entre elles, ainsi que les trois sommes de leurs carrés.* (F. PROTH.)

En désignant par s_1 la somme des trois nombres x, y, z placés aux sommets du triangle, par s_2 la somme de leurs carrés, par S_1 la somme des nombres 1, 2, 3, ..., 9, par S_2 celle de leurs carrés, par c_1 la somme des quatre nombres placés sur chaque côté du triangle et par c_2 celle de leurs carrés, nous aurons

$$S_1 = 45, \quad S_2 = 285, \quad 3c_1 = 45 + s_1, \quad 3c_2 = 285 + s_2,$$

d'où l'on conclut que s_1 et s_2 sont multiples de 3, et que, pour chaque système de valeurs de x, y, z satisfaisant à ces deux conditions, on obtiendra les valeurs correspondantes de c_1 et c_2 en augmentant 15 et 95 respectivement des tiers de s_1 et s_2. Cela étant, observons que, suivant qu'un nombre est ou non multiple de 3, son carré est de la forme $3n$ ou $3n + 1$, d'où il suit que, pour que s_2 soit multiple de 3, il faut que x, y, z soient multiples de 3 ou chacun de la forme $3n \pm 1$.

Soit donc d'abord $x = 3, y = 6$, $z = 9$, ce qui donne $c_1 = 21$ et $c_2 = 137$. Comme la somme des carrés de 8 et 9 excède 137, on ne peut placer 8 qu'entre 3 et 6, et, pour compléter la somme $c_1 = 21$, il faut aussi placer 4 entre 3 et 6; or la somme des carrés des nombres 6, 8, 4, 3 égale $125 < 137$; donc 8 n'a aucune position possible entre deux des nombres 3, 6, 9, et, par suite, il faut exclure le cas où x, y, z sont multiples de 3.

On reconnaît immédiatement que, parmi tous les systèmes de trois des six nombres 1, 2, 4, 5, 7, 8, 1, 4, 7 et 2, 5, 8 sont les seuls pour lesquels s_1 est multiple de 3. Cela étant, on prouvera que le système 1, 4, 7 est inadmissible en montrant, comme pour 8 dans le système 3, 6, 9, que 9 n'a aucune position possible entre deux quelconques des nombres 1, 4, 7. Enfin, pour le système 2, 5, 8, on voit d'abord que 9 ne peut être placé qu'entre 2 et 5, puis que 7 ne peut être placé qu'entre 2 et 8. La position des quatre autres chiffres se trouve ainsi déterminée : 4 entre 2 et 5, 3 entre 2 et 8, puis 1 et 6 entre 5 et 8. On reconnaît d'ailleurs que $c_1 = 20$ et $c_2 = 126$ pour chacun des trois côtés du triangle.

Sans tenir compte de la condition que la somme c_1 soit constante pour chacun des trois côtés, on pourrait démontrer, au moyen de calculs un peu plus longs, que la solution précédente est encore la seule possible. Enfin, abstraction faite, dans le problème proposé, de la condition que la somme c_2 soit la même pour chaque côté, on trouve d'abord assez rapidement que le nombre des systèmes de trois chiffres significatifs, dont la somme s_1 est multiple de 3, égale trente, puis que, parmi ces derniers, il faut en exclure vingt pour chacun desquels la différence $c_1 - s_1$ est exprimée par un chiffre significatif autre que ceux déjà placés aux sommets. Alors il ne reste plus que les dix systèmes de trois chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 4, 7, 2, 5, 8,
3, 6, 9, 3, 5, 7, 1, 5, 9, 2, 3, 7, 3, 7, 8

qui puissent être placés aux sommets du triangle, lesquels donnent lieu aux dix-huit solutions comprises dans le Tableau suivant :

x,	r,	s,	y,	t,	u,	z,	v,	w,	x,	r,	s,	y,	t,	u,	z,	v,	w,
1,	6,	8,	2,	5,	7,	3,	4,	9,	1,	5,	9,	2,	4,	8,	3,	6,	7,
4,	2,	9,	5,	1,	8,	6,	3,	7,	4,	3,	8,	5,	2,	7,	6,	1,	9,
7,	2,	6,	8,	1,	5,	9,	3,	4,	7,	3,	5,	8,	2,	4,	9,	1,	6,
1,	6,	8,	4,	3,	5,	7,	2,	9,	1,	5,	9,	4,	2,	6,	7,	3,	8,
2,	6,	7,	5,	3,	4,	8,	1,	9,	2,	4,	9,	5,	1,	6,	8,	3,	7,
3,	5,	7,	6,	2,	4,	9,	1,	8,	3,	4,	8,	6,	1,	5,	9,	2,	7,
3,	4,	8,	5,	2,	6,	7,	1,	9,	1,	6,	8,	5,	2,	4,	9,	3,	7,
2,	6,	8,	3,	4,	5,	7,	1,	9,	2,	5,	9,	3,	1,	8,	7,	4,	6,
3,	2,	9,	7,	1,	5,	8,	4,	6,	3,	5,	6,	7,	2,	4,	8,	1,	9,

où les lettres r et s, t et u, v et w représentent successivement les groupes de deux chiffres placés entre x et y, y et z, z et x.

Remarque I. — Les problèmes précédents peuvent être généralisés, en remplaçant dans leur énoncé les neuf chiffres 1, 2, 3, ..., 9 par neuf nombres *quelconques* $a+1$, $a+2$, ..., $a+9$ en progression arithmétique dont la raison est 1. On voit facilement que toutes les nouvelles solutions se déduisent des précédentes en y remplaçant chaque chiffre c, dans la position où il se trouve placé, par le nombre $(c+a)$.

Remarque II. — Si, dans chacune des solutions de ces problèmes, on tenait compte des permutations qu'on peut faire subir aux trois nombres x, y, z placés aux sommets et aux deux nombres de chacun des trois groupes placés entre deux sommets, on aurait un nombre de solutions quarante-huit fois plus grand.

Note. — La même question (1323) a ete resolue par M. Lissençon, ancien eleve de l'Ecole Polytechnique et par M. Moret-Blanc.