NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Méthode directe pour calculer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 513-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__513_1>

MÉTHODE DIRECTE POUR CALCULER LA SOMME DES PUISSANCES α DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

[SUITE (*)].

Sommes des dix premières puissances des n premiers nombres entiers.

4. Nous avons appliqué la méthode exposée page 459 à la sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers, depuis la première jusqu'à la dixième inclusivement. Nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\Sigma n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$\Sigma n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$\Sigma n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

(*) *Nouv. Ann.*, 2e serie, t. XVIII, p. 459.

$$\Sigma n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$\Sigma n^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$\Sigma n^7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

$$\Sigma n^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$

$$\Sigma n^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

$$\Sigma n^{10} = \frac{1}{66} n(n+1)(2n+1)$$
$$\times(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5).$$

La comparaison de ces formules conduit à des résultats qui méritent d'être signalés.

5. Nous obtenons d'abord les six égalités

$$(\mathrm{I}) \qquad \Sigma n^2 + \Sigma n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2),$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \Sigma n^2 - \Sigma n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n+2),$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \Sigma n^3 - \Sigma n = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2),$$

$$\Sigma n^3 + \Sigma n^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

$$\Sigma n^3 - \Sigma n^2 = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Nous voyons par les formules (I), (II) et (III) que :

1° *La somme des carrés des n premiers nombres en-*

tiers, ajoutée à la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n.

2° *La somme des carrés des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.*

3° *La somme des cubes des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme de ces n mêmes nombres, est égale au quart du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.*

6. Nous trouvons ensuite que

$$\Sigma n^4 - \Sigma n = \frac{1}{30}(n-1)n(n+1)(6n^2+15n+16),$$

$$\text{(IV)} \qquad \Sigma n^4 - \Sigma n^2 = \frac{1}{10}(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1),$$

$$\Sigma n^4 - \Sigma n^3 = \frac{1}{60}(n-1)n(n+1)(12n^2+15n+2).$$

Nous concluons de l'égalité (IV) que :

La somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers, diminuée de la somme des carrés de ces n mêmes nombres, est égale au produit de 2n + 1 par le dixième du produit de quatre nombres entiers consécutifs, dont le premier est n — 1.

7. Si nous divisons (IV) par (III), nous aurons

$$\text{(V)} \qquad \frac{\Sigma n^4 - \Sigma n^2}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{5}(2n+1).$$

Donc, *si n est égal à un multiple de 5 plus 2, la différence entre la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des carrés de* *ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme des cubes des n premiers nombres entiers et la somme de ces n mêmes nombres.*

8. Il nous vient encore

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma n^4 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{10}\right] \Sigma n^2,$$

$$\text{(VII)} \qquad \Sigma n^5 = \left[\Sigma n + \frac{(n-1)(n+2)}{6}\right] \Sigma n^3.$$

Mais le produit $(n-1)(n+2)$ est toujours divisible par 2; donc :

1° *Si n égale un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 3, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.*

2° *Si n égale un multiple de 3 plus 1, la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.*

9. Comme on a

$$\text{(VIII)} \qquad \Sigma n^5 - \Sigma n^3 = \frac{1}{6}(n-1)n^2(n+1)^2(n+2),$$

on voit, au moyen de (III), que

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\Sigma n^5 - \Sigma n^3}{\Sigma n^3 - \Sigma n} = \frac{2}{3} n(n+1).$$

Donc, *si n est un multiple de 3 ou un multiple de 3 moins 1, la différence entre la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers et la somme des cubes de ces n mêmes nombres est divisible par la différence entre la somme de ces cubes et la somme des n mêmes nombres.*

10. Nous avons

$$\frac{\Sigma n^6}{\Sigma n^2} = \frac{1}{7}(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

Or, si n est un multiple de 7 plus 1 et égal à $7p + 1$, le facteur $3n^4 + 6n^3 - 3n + 1$ sera divisible par 7, car le reste de la division de

$$3(7p + 1)^4 + 6(7p + 1)^3 - 3(7p + 1) + 1$$

par 7 est le même que celui que l'on obtient en divisant par 7 la somme

$$3 + 6 - 3 + 1 = 7$$

des restes. Donc :

Si n est un multiple de 7 plus 1, la somme des sixièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés de ces n mêmes nombres.

11. Puisque

$$\begin{aligned}\Sigma n^7 &= \frac{1}{24} n^2(n + 1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 + 4n + 2)\\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} n^2(n + 1)^2\left[\frac{3}{2} n^2(n + 1)^2 - 2n(n + 1) + 1\right],\end{aligned}$$

il vient

$$\Sigma n^7 = \frac{1}{3}\Sigma n^3(6\Sigma n^3 - 4\Sigma n + 1).$$

Mais, si n est un multiple de 3 plus 1, $4\Sigma n - 1$ sera divisible par 3. Donc :

Si n est un multiple de 3 plus 1, la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces n mêmes nombres.

12. D'autres relations plus ou moins simples peuvent se déduire de nos formules.

Nous citerons encore la suivante,

$$(\mathrm{X}) \qquad 2(\Sigma n^3)^2 = \Sigma n^5 + \Sigma n^7,$$

qui ne manque pas d'intérêt.