Nouvelles annales de mathématiques

Paul Terrier

Question proposée au concours pour l'agrégation des sciences mathématiques (1878)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 361-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__361_0>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1878)

(voir 2e série, t. XVIII, p. 36);

SOLUTION DE M. PAUL TERRIER.

On donne deux points P *et* P' *sur la circonférence* S *circonscrite à un triangle* ABC. *On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des points* P *et* P' *sur les trois côtés du triangle sont respectivement sur deux droites.*

1° *Démontrer que le point de rencontre* M *de ces droites décrit une circonférence* S' *quand le sommet* C *du triangle se meut sur la circonférence* S, *les points* A, B, P, P' *restant fixes.*

2° *Trouver le lieu des centres des circonférences* S', *les points* A *et* B *restant fixes et les points* P *et* P' *se déplaçant sur la circonférence* S, *de telle sorte que l'arc* PP' *conserve une longueur constante.*

1° Les droites QR et Q'R', qui joignent les pieds des perpendiculaires respectivement abaissées des points P et P' sur AB et sur AC, se coupent sous un angle M égal à la somme (ou à la différence) des angles PRQ, P'R'Q' (*), sous lesquels les côtés QM et Q'M sont respectivement coupés par les parallèles PR et P'R'. Mais on voit, par les quadrilatères inscriptibles PRAQ, P'R'AQ', que les

(*) Quand les points P et P' sont situés d'un même côté de AC, l'angle M ou QMQ' est égal à la différence des angles PRQ, P'R'Q', et, lorsque les points P, P' sont de différents côtés de AC, l'angle QMQ' est le supplément de la somme des angles PRQ, P'R'Q'. Dans les deux cas, QMQ' = PAP'. (*Note du Rédacteur.*)

angles PRQ, P′R′Q′ sont respectivement égaux aux angles PAB, P′AB, dont la somme (ou la différence) constante PAP′ est dès lors égale à l'angle M. Le lieu des points M est donc une circonférence S′ qui passe par les points Q et Q′ et dont le rayon est au rayon de S dans le rapport des segments de droites QQ′, PP′.

Il est à remarquer que les pieds A′ et B′ des perpendiculaires abaissées des points A et B sur PP′ sont les positions particulières du point M qui correspondent respectivement à la position AA′ de AC et à la position BB′ de BC. On pourra donc déterminer très-simplement un troisième point A′ ou B′ de la circonférence S′, dont on connaît déjà les points Q et Q′.

2° Il résulte immédiatement de notre dernière remarque que les perpendiculaires abaissées du centre S sur AB, et du centre S′ sur A′B′ se coupent au point O, milieu de AB. Pareillement, les perpendiculaires abaissées du centre S sur PP′, et du centre S′ sur QQ′ se coupent au point T, milieu de PP′. On a d'ailleurs, dans le parallélogramme SOS′T, OS′ = ST. Le lieu des centres S′ est donc une circonférence décrite du point O, milieu de AB, comme centre, avec un rayon égal à celui de la circonférence tangente à toutes les cordes PP′.

Quant à la loi de variation de la circonférence S′, on la déduit de ce que le rapport de son rayon à celui de S est égal au rapport du segment QQ′ au segment PP′. On voit immédiatement que le rayon de S′ a deux valeurs symétriques maxima égales au rayon de S lorsque PP′ est parallèle à AB, et deux valeurs nulles lorsque PP′ est perpendiculaire sur AB.

La question posée est du reste un cas particulier de la question 1263 (première partie), précédemment insérée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XVII, p. 239). Il est aisé de vérifier, en effet, que l'angle M ne cesse pas d'être constant et égal à l'angle inscrit sous-tendu par l'arc PP' de S, lorsqu'on remplace les perpendiculaires abaissées des points P et P' sur les côtés du triangle ABC par des obliques faisant avec les mêmes côtés des angles α, égaux et de même orientation, mais d'ailleurs quelconques. Les points A' et B', communs à la circonférence S' et à la droite PP', sont, dans ce cas, les pieds des obliques menées des points A et B à la droite PP', sous l'angle α, et dans le sens convenu. Le lieu des centres S' est la circonférence qui a pour diamètre le segment de AB limité par les deux cordes PP' qui coupent AB sous l'angle α.

La deuxième partie de la question 1263 est relative au lieu décrit par le point M quand on fait varier l'angle α.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Gambey; Bertrand Armand; F. Fauge, chargé de cours au Lycée de Toulouse; Robaglia; Arthur Leinchugel, etudiant en Mathématiques.