NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LIONNET

Note sur la question « Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers ? »

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 356-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__356_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR LA QUESTION « TOUT NOMBRE PAIR EST-IL LA SOMME DE DEUX IMPAIRS PREMIERS? »

PAR M. LIONNET.

Cette question, posée d'abord par Goldbach dans sa correspondance avec Euler, n'a pas encore été résolue. Mais en général les géomètres qui s'en sont occupés, et particulièrement Euler, regardent l'affirmative comme très-probable. Nous allons démontrer quelques propositions qui nous semblent plutôt établir la probabilité contraire.

I. THÉORÈME. — *Si l'on désigne respectivement par les lettres q, x, y, z le plus grand nombre entier contenu dans le quart d'un nombre pair $2a$; le nombre des manières dont $2a$ est la somme de deux impairs premiers; le nombre des manières dont $2a$ est la somme de deux impairs composés et inégaux; et le nombre des impairs premiers inférieurs à $2a$, on aura la relation*

$$(1) \qquad q + x = y + z.$$

Pour la démontrer, nous distinguerons trois cas, suivant que $2a$ est multiple de 4, double d'un impair composé, ou double d'un impair premier; c'est-à-dire les trois cas généraux comprenant les trois cas particuliers, faciles à vérifier,

$$2a = 24 = 4 \times 6;\quad 2a = 30 = 15 \times 2;\quad 2a = 34 = 17 \times 2.$$

Premier cas : $2a = 4q$.

$$(2)\quad \begin{cases} (4q-1).(4q-3) \ \ldots\ (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad \ \ldots\ (2q-3).(2q-1). \end{cases}$$

Les $2q$ nombres impairs inférieurs à $2a$ sont en progression arithmétique dont le premier terme est l'unité, la raison égale à 2, et le dernier terme égal à $4q-1$. Quant aux sommes de deux termes également distants des extrêmes, elles sont toutes égales à $2a$, et leur nombre est égal à q. De plus, chacune de ces sommes étant formée de deux impairs premiers, ou de deux impairs composés et inégaux, ou de deux impairs l'un premier et l'autre composé, si l'on désigne par z' le nombre de ces dernières sommes, on aura évidemment

$$(3)\qquad q = x + y + z',$$

et, par suite,

$$(4)\qquad q + x = y + 2x + z\ ;$$

remplaçant $2x + z'$ par z qui lui est égal, on obtient la relation (1).

Deuxième cas : $2a = 4q + 2$; $2q + 1$ étant composé.

$$(5)\quad \begin{cases} (4q+1).(4q-1) \ \ldots\ (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad \ \ldots\ (2q-1).(2q+1). \end{cases}$$

Abstraction faite des deux impairs composés égaux à $2q+1$, on voit que le nombre des sommes de deux impairs, dont chacune égale $2a$, est encore égale à q, et l'on est conduit successivement, par un raisonnement semblable au précédent (*premier cas*), aux relations (3), (4), (1).

Troisième cas : $2a = 4q + 2$; $2q + 1$ étant premier.

$$(6)\quad \begin{cases} (4q+1).(4q-1)\ \ldots\ (2q+3).(2q+1) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad\ \ldots\ (2q-1).(2q+1). \end{cases}$$

Ici, le nombre des sommes de deux impairs, toutes égales à $2a$, est $q + 1$, au lieu d'être égal à q comme dans chacun des cas précédents, parce qu'il faut y comprendre la somme des deux nombres premiers égaux à $2q + 1$. On aura donc

$$(7)\qquad q + 1 = x + y + z',$$

et, par suite,

$$(8)\qquad q + x = y + (2x - 1) + z';$$

mais, le nombre premier $2q + 1$ étant compté deux fois dans $2x$, on a

$$(9)\qquad (2x - 1) + z' = z,$$

ce qui ramène (8) à l'égalité (1), laquelle se trouve ainsi démontrée pour toutes les valeurs de $2a$, y compris son minimum égal à 2.

Corollaire. — On déduit de la relation (1)

$$(10)\qquad x = y + z - q;$$

donc, pour que $x = 0$, il faut et il suffit que $y + z = q$; ou, en d'autres termes, pour qu'un nombre pair $2a$ ne soit pas égal à la somme de deux impairs premiers, il faut et il suffit que la somme $y + z = q$. Ainsi, ce théorème (*non démontré*) : *Tout nombre pair* $2a$ *est la somme de deux impairs premiers,* revient à celui-ci : *Pour tout nombre pair* $2a$, *la relation* $y + z = q$ *est impossible.*

II. Théorème. — *Le nombre n étant aussi grand qu'on voudra, il existe : 1° n entiers consécutifs composés ; 2° n impairs consécutifs composés.*

1° Soit

$$2i = 2.3.5.7.11\ldots p, \tag{11}$$

p étant le plus grand des nombres premiers non supérieurs à $n+1$; chacun des n entiers consécutifs

$$(2i+2),\ (2i+3),\ (2i+4),\ldots,(2i+n+1)$$

est un nombre composé. Car soit $2i+h$ l'un quelconque de ces n entiers : h, étant compris entre 1 et $n+2$, admet comme diviseur l'un au moins des facteurs premiers de $2i$, (11) ; donc $2i+h$, somme de deux multiples d'un facteur premier de $2i$, est un nombre composé.

2° Soit

$$2i = 2.3.5.7.11\ldots p, \tag{12}$$

p étant le plus grand des nombres premiers non supérieurs à $2n+1$; chacun des n impairs consécutifs

$$\left\{\begin{array}{l}(2i+3),\ (2i+5),\ (2i+7),\ (2i+9),\ldots,\\ \qquad\qquad\qquad (2i+2n+1)\end{array}\right. \tag{13}$$

est un nombre composé. On le prouve comme précédemment (1°), en observant que, si $2i+h$ désigne l'un quelconque de ces n impairs, h est un impair compris entre 2 et $2n+2$.

Corollaire. — En consultant une Table de nombres premiers, on reconnaît immédiatement que, pour de très-grandes valeurs d'un nombre pair $2a$, le rapport du nombre z des impairs premiers inférieurs à $2a$ à celui des impairs composés est très-petit. De plus, puisque dans la suite des nombres impairs il existe un nombre indéfini de groupes (2°) d'impairs consécutifs composés en nombre n aussi grand qu'on voudra, on est en droit d'en conclure que le rapport de z au nombre des impairs composés inférieurs à $2a$ est infiniment petit quand $2a$ est infiniment grand.

III. Conclusion. — Considérons la progression

$$\begin{array}{l} (2i+2n+1).(2i+2n-1)\ldots(2i+3)\ldots(i+n+2) \\ \quad 1 \quad . \quad 3 \quad \ldots (2n-1)\ldots(i+n), \end{array}$$

où nous supposerons n pair et $2i = 2.3.5\ldots p$, (12). Cette progression sera dans le cas de la progression (2), où la somme des extrêmes $= 2a = 4q$. De plus, ses n derniers termes étant tous comme les n termes de la progression (13) des impairs composés, aucune des n premières sommes de deux termes également distants des extrêmes n'est formée de deux nombres premiers. Quant aux autres termes dont le plus petit est $2n+1$, comme ce nombre n peut être supposé aussi grand qu'on voudra, le rapport du nombre des impairs premiers à celui des impairs composés sera infiniment petit (II, Cor.), de sorte que, par exemple, sur chaque million de milliards de ces termes il pourra ne se trouver qu'un seul impair premier. Il est donc permis d'en conclure que, parmi le nombre infini de valeurs très-considérables dont n est susceptible, il en est très-probablement au moins une pour laquelle aucune des q sommes de deux impairs, toutes égales à $2a$, ne sera formée de deux impairs premiers, ou, en d'autres termes, au moins une valeur de n pour laquelle l'égalité $y + z = q$ sera vérifiée.