NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BADOUREAU

Enveloppe de la droite de Simpson

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 33-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__33_0>

ENVELOPPE DE LA DROITE DE SIMPSON;

PAR M. BADOUREAU,
Ingénieur des Mines.

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite, et que, si le point décrit le cercle, la droite enveloppe une courbe du quatrième degré à trois points de rebroussement.

Cette question peut être traitée par le calcul de la manière suivante.

Prenons d'abord l'origine au centre du cercle, et soient α, β, γ, φ les coordonnées angulaires des sommets A, B, C du triangle et du point F choisi sur le cercle. Prenons l'axe des x de telle sorte qu'on ait $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

Le côté $\alpha\beta$ et la perpendiculaire φc abaissée du point φ sur ce côté ont pour équations

$$(1)\qquad -x\cos\frac{\gamma}{2}+y\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$(2)\qquad x\sin\frac{\gamma}{2}+y\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\varphi\right),$$

pourvu qu'on prenne comme unité le rayon du cercle. Multiplions l'équation (1) par $\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$ et l'équation (2) par $\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}$, et ajoutons membre à membre; il vient

$$(3)\quad x\sin\frac{\varphi}{2}+y\cos\frac{\varphi}{2}=\sin^3\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}\sin\frac{\beta-\varphi}{2}\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}.$$

Cette équation, symétrique par rapport à α, β, γ, représente la droite abc. En transportant l'origine au centre du cercle des neuf points, qui a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

l'équation devient

$$(4) \qquad x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

L'enveloppe de cette droite est l'hypocycloïde représentée par les deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \cos\varphi + \dfrac{1}{2}\cos 2\varphi, \\ y = \sin\varphi - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi. \end{cases}$$

En éliminant φ, on obtient l'équation du quatrième degré

$$(6) \qquad (4x^2 + 4y^2 + 24x + 9)^2 = 4(4x + 3)^3.$$

Cette courbe a trois points de rebroussement aux sommets d'un triangle équilatéral MNP.

En prenant ce triangle comme triangle de référence, on obtient l'équation homogène

$$(7) \qquad (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = 4\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma).$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 0.$$

Cette équation se décompose en trois autres qui représentent respectivement les trois arcs de courbe limités aux points de rebroussement :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}},\\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},\\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \end{aligned}\right.$$

En terminant, il est à peine utile d'ajouter que le lieu est tangent aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle donné ABC.