S. RÉALIS

Note sur la question 794

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 301-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__301_1>

NOTE SUR LA QUESTION 794;

(voir 2e série, t. VI, p. 94)

Par M. S. REALIS.

L'équation indéterminée

$$u^2 x + x^2 y + y^2 z + z^2 u = 0,$$

qui est vérifiée identiquement, d'après la question 794, par les formules du troisième degré

$$(1)\quad \begin{cases} u = \alpha^2\gamma - \beta^3, \\ x = \alpha(\alpha\beta - \gamma^2), \\ y = \alpha^3 - \beta^2\gamma, \\ z = -\beta(\alpha\beta - \gamma^2), \end{cases}$$

est aussi vérifiée par les formules du deuxième degré

$$(2)\quad \begin{cases} u = \alpha^2 - \alpha\beta + 3\beta^2, \\ x = 3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2), \\ y = -\alpha^2 + 3\alpha\beta - 5\beta^2, \\ z = 3(-\alpha^2 + 3\alpha\beta - 3\beta^2), \end{cases}$$

et par les formules du quatrième degré

$$(3)\quad \begin{cases} u = -(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 - \beta^4), \\ x = -(\alpha - \beta)(\alpha^3 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3), \\ y = (\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \\ z = \beta(\alpha - \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2), \end{cases}$$

dont l'exactitude se constate facilement par le calcul direct.

Le système (1) a cela de particulier, qu'il permet toujours d'assigner des solutions entières dans lesquelles la valeur de l'une des indéterminées est fixée d'avance arbitrairement.

Le système (2), de son côté, en y attribuant à α et β des valeurs entières quelconques, fournit des solutions où les quatre indéterminées, délivrées des facteurs communs, ne peuvent être que des nombres impairs. On voit de plus, en mettant la valeur de z sous la forme

$$z = -3[(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta)\beta + \beta^2],$$

que, dans ce système, les valeurs numériques des indéterminées x, z se réduisent toujours à la forme

$$3(3X^2 + Y^2).$$

Dans le troisième système, enfin, les expressions des deux indéterminées consécutives y, z renferment un facteur appartenant à la forme $3X^2 + Y^2$, ce qui, en certains cas, peut rendre préférable l'emploi des formules (3).

Outre ces systèmes de solution, il en existe d'autres où les formules montent à des degrés supérieurs au quatrième. Nous nous bornons ici à cette simple indication.

Ajoutons que, si une solution de l'équation considérée est donnée par l'égalité

$$\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\delta + \delta^2\alpha = 0,$$

une autre solution s'obtiendra en posant

$$(4)\quad \begin{cases} u = (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 + 2\delta^2 + 2\beta\gamma - \delta(3\alpha - 3\beta - \gamma), \\ x = \beta^2 - (\gamma - \delta)^2 + \alpha(\beta - \gamma + \delta) + 2\beta\gamma, \\ y = -\alpha^2 + 2\beta^2 + (\gamma - \delta)^2 + 2\alpha\delta + \beta(\alpha - 3\gamma + 3\delta), \\ z = -(\alpha - \beta)^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta - \gamma(\alpha - \beta - \delta). \end{cases}$$

La vérification de ces formules n'a de difficulté qu'un peu de complication dans les calculs pour mettre en évidence le facteur qui annule le résultat de la substitution de ces expressions dans le premier membre de la proposée. On observera, à l'égard de ces formules (4), que les expressions de y et z se déduisent de celles de u et x, et réciproquement, en remplaçant les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les lettres $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ respectivement.

Applications. — 1° Soit fait, dans les formules (1),

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1;$$

il vient

$$u = 3, \quad x = 2, \quad y = 7, \quad z = -1,$$

et l'on a effectivement

$$3^2.2 + 2^2.7 - 7^2.1 + 1^2.3 = 0.$$

2° Pour $\alpha = 2$, $\beta = -1$, les formules (2) et (3) amènent respectivement les égalités

$$3^2.7 - 7^2.5 - 5^2.13 + 13^2.3 = 0,$$
$$-5^2.11 + 11^2.8 - 8^2\;7 - 7^2.5 = 0.$$

3° Au moyen des formules (4), les trois solutions particulières qui viennent d'être trouvées engendrent respectivement les trois solutions nouvelles

$$-22^2.50 + 50^2.15 - 15^2.20 - 20^2.22 = 0,$$
$$-21^2.11 - 11^2.9 + 9^2.15 + 15^2.21 = 0,$$
$$-12^2.50 + 50^2.354 - 354^2.7 - 7^2.12 = 0.$$