NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés et sur les axes des surfaces de révolution du second ordre qui passent par cinq points donnés. Sur les lignes spiriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 206-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__206_1>

SUR LA COURBE ENVELOPPÉE PAR LES AXES DES CONIQUES QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS DONNÉS ET SUR LES AXES DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE QUI PASSENT PAR CINQ POINTS DONNÉS. SUR LES LIGNES SPIRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. La courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés est, comme on le

sait, une courbe du quatrième degré et de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini. L'équation d'une telle courbe ne renferme que six constantes arbitraires et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de façons différentes comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Je me propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui permettent le mode de génération indiqué.

2. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai fait connaître depuis longtemps dans les *Nouvelles Annales* :

Étant donnés sur une conique deux points fixes A *et* B *et un point* M *mobile sur cette conique, si, aux points milieux des cordes* AM *et* BM, *on élève des perpendiculaires à ces cordes, le segment, intercepté sur l'un quelconque des axes de la conique par ces perpendiculaires, demeure constant quand le point* M *se meut sur la courbe.*

Supposons que le point M vienne successivement coïncider avec deux points donnés C et D de la conique ; on aura la proposition suivante :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, aux points milieux des cordes* AC, BC, AD *et* BD, *élevons des perpendiculaires à ces cordes et désignons respectivement par* A', B', A'' *et* B'' *ces perpendiculaires ; cela posé, les segments, interceptés sur l'un quelconque des axes de la conique par les perpendiculaires* A' *et* B' *d'une part et par les perpendiculaires* A'' *et* B'' *d'autre part, sont égaux entre eux.*

Il est clair que, le quadrangle ABCD étant donné, on pourrait considérer d'autres cordes que celles que je viens de considérer et qui donneraient lieu à des propositions semblables. En examinant cette question, on voit facilement que ces propositions sont contenues dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, désignons par* α, β, γ *et* δ *les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec trois quelconques de ces sommets. Cela posé, les trois couples de côtés opposés du quadrangle formé par les points* α, β, γ *et* δ *interceptent, sur l'un quelconque des axes de la conique, trois segments dont le point milieu est le même.*

3. On sait, par le théorème de Desargues, que généralement les six côtés d'un quadrangle sont coupés par une droite quelconque en six points en involution ; on voit ici que les six côtés du quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ sont coupés, par un axe quelconque d'une des coniques passant par les quatre points A, B, C et D, en six points formant une involution dont un des points doubles est rejeté à l'infini.

Imaginons les deux coniques circonscrites au quadrangle ABCD et tangentes à cet axe ; leurs points de contact avec cette droite sont précisément les deux points doubles de l'involution dont je viens de parler ; l'une de ces coniques est donc asymptote de l'axe.

En d'autres termes :

Un axe quelconque d'une conique circonscrite au quadrangle ABCD est une asymptote d'une conique circonscrite au quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$.

4. Pour abréger le discours, étant donné un quadrangle

quelconque ABCD, je désignerai sous le nom de *quadrangle dérivé* le quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB.

On peut donc dire que :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé.

5. Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrangle donné et K la courbe enveloppée par les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle.

Une telle courbe peut être engendrée de cette façon d'une infinité de manières. Considérons, en effet, une quelconque des coniques circonscrites au quadrangle et soient D et D' ses deux asymptotes; nous dirons que ces deux droites sont deux tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, on sait (*) que, si l'on considère deux couples quelconques de tangentes conjuguées, ces deux couples se rencontrent en quatre points formant un quadrangle Q et que les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle enveloppent la courbe K.

Si donc on construit le quadrangle Q' ayant pour dérivé le quadrangle Q, les axes des coniques circonscrites à Q' envelopperont la courbe K, et l'on obtiendra toutes les façons semblables d'engendrer cette courbe en considérant tous les quadrangles qui ont pour dérivés les divers quadrangles Q.

6. La projection orthogonale d'une courbe K, sur un

(*) Voir Steiner, *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse und vierten Grades* (*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 231) et Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Ibid.*, t. LXIV, p. 101).

plan quelconque, est évidemment une courbe de la même espèce.

Soient A, B, C et D quatre points donnés et K l'enveloppe des axes des coniques passant par ces points; désignons par K′ la projection de cette courbe sur un plan P, cette projection peut être considérée comme l'enveloppe des axes des coniques passant par quatre points A′, B′, C′ et D′ que l'on construira de la façon suivante.

Dans le plan du quadrangle ABCD, imaginons le quadrangle dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$ et projetons ce dernier quadrangle sur le plan P; soit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ cette projection. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut, que les points cherchés A′, B′, C′ et D′ seront les sommets du quadrangle qui a pour dérivé $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

7. Il peut être utile dans certains cas de construire le quadrangle qui a pour dérivé un quadrangle donné $\alpha\beta\gamma\delta$.

Soient A, B, C et D les sommets du quadrangle cherché; en sorte que α désigne, par exemple, le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, β le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, etc.

On voit immédiatement que le symétrique du point A relativement à la droite $\beta\delta$ est le point C et que le symétrique du point C relativement à la droite $\beta\alpha$ est le point D; on a donc les deux relations suivantes :

$$A\beta\gamma + C\beta\gamma = 2\delta\beta\gamma \quad \text{et} \quad C\beta\gamma + D\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma;$$

les points A et D étant d'ailleurs aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\gamma$, on a également

$$A\beta\gamma + D\beta\gamma = 0.$$

Chacune des trois relations précédentes doit être vérifiée *à un multiple près de* 2π; on en déduit facilement

$$2A\beta\gamma = 2(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\gamma) = 2\delta\beta\alpha,$$

d'où

$$A\beta\gamma = \delta\beta\alpha,$$

relation qui doit être vérifiée *à un multiple près de* π.

Cette dernière relation détermine une droite contenant le point A; la relation

$$A\gamma\delta = \beta\gamma\alpha,$$

que l'on obtient d'une façon analogue, détermine une seconde droite contenant le point que l'on peut ainsi construire facilement.

On construirait de même les autres sommets B, C et D du quadrangle cherché.

8. Dans le cas particulier où le quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ est formé des sommets d'un triangle et du point de rencontre des hauteurs de ce triangle, on sait que l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par ces quatre points est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Le quadrangle ABCD, qui a pour dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$, est alors le symétrique de ce dernier quadrangle relativement au centre de l'hypocycloïde.

On voit donc que :

Si l'on considère les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle, les asymptotes des coniques passant par ces quatre points enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la courbe symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

II.

9. Considérons une conique quelconque C et un axe A de cette conique; soient M et M' deux quelconques

de ces points. Par le milieu I du segment MM' menons une perpendiculaire à cette droite et soit H le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe. Imaginons maintenant que la conique, en tournant autour de l'axe A, engendre une surface de révolution; les deux points M et M' engendrent deux parallèles de cette surface et la sphère contenant ces deux parallèles a pour centre le point H. Si donc on prend respectivement sur ces deux parallèles deux points arbitraires m et m', on voit que le plan, mené par le milieu du segment mm' et perpendiculairement à ce segment, passe par le point H.

De cette remarque et de la proposition que j'ai rappelée plus haut (n° 2) résulte immédiatement le théorème suivant:

Étant donnés sur une surface du second ordre de révolution deux points fixes A *et* B *et un point mobile* M, *si, par les points milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des plans perpendiculaires à ces cordes, le segment que ces plans interceptent sur l'axe de révolution de la surface est un segment dont la longueur demeure constante lorsque le point* M *se déplace.*

La même propriété a lieu évidemment relativement à une courbe quelconque tracée sur une surface de révolution du second ordre, lorsque l'on considère sur cette courbe deux points fixes A et B et un point mobile M.

En particulier :

Une courbe quelconque étant tracée sur une surface de révolution du second ordre, considérons deux points quelconques M *et* N *situés sur cette courbe. Menons les plans normaux à la courbe aux points* M *et* N *et désignons respectivement par m et n les points où ces plans normaux rencontrent l'axe de révolution de cette sur-*

face; soit de plus H *le point où le plan mené par le milieu de la corde* MN *et perpendiculairement à cette corde rencontre cet axe. Cela posé, le point* H *est le milieu du segment mn.*

10. Considérons une *ellipsimbre droite* (*), c'est-à-dire la courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant trois axes communs, que l'on peut appeler les axes de l'ellipsimbre.

On sait que cette courbe peut être placée sur une surface du second ordre de révolution ayant l'une quelconque de ces trois droites pour axe de révolution.

Donc :

Étant donnée une ellipsimbre droite et deux points quelconques M *et* N *pris sur cette courbe, les plans menés normalement à la courbe aux points* M *et* N *interceptent sur les trois axes de l'ellipsimbre trois segments; le plan passant par leurs points milieux passe par le point milieu de la corde* MN *et lui est perpendiculaire.*

11. Soit S une surface de révolution du second ordre ayant pour axe la droite Δ, et soient A, B, C et D quatre points quelconques situés sur cette surface. Les plans menés par les milieux des cordes AB et BC et perpendiculairement à ces cordes interceptent sur l'axe Δ un segment qui (n° 9) est égal au segment intercepté sur la même droite par les plans menés, par les milieux des cordes AD et DC, perpendiculairement à ces cordes; d'autres propositions semblables s'obtiendraient en considérant

(*) Expression employée d'abord par Frézier et adoptee par M. de la Gournerie dans ses *Recherches sur les surfaces tétraédrales*.

les diverses droites qui joignent deux à deux les sommets du tétraèdre ABCD.

Ces diverses propositions peuvent être résumées dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un tétraèdre inscrit dans une surface de révolution du second ordre, considérons les perpendiculaires abaissées sur les faces de ce tétraèdre par le centre de la sphère qui lui est circonscrite; les trois couples de plans opposés, que l'on peut mener par ces quatre droites, interceptent sur l'axe de la surface trois segments dont le point milieu est le même.*

En d'autres termes :

Si l'on désigne par ε *le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* ABCD *et si l'on mène par le point* ε *une parallèle à l'axe* Δ, *le cône du second degré, ayant pour sommet* ε *et contenant la parallèle dont je viens de parler ainsi que les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, est asymptote à l'axe* Δ.

Le plan passant par Δ *et le sommet* ε *est donc tangent au cône.*

12. Les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre que l'on peut mener par quatre points donnés A, B, C et D forment un complexe dont il est facile de trouver, d'après ce qui précède, les propriétés les plus essentielles.

Désignons, comme ci-dessus, par ε le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et par A′, B′, C′ et D′ les perpendiculaires abaissées du point ε sur les faces du tétraèdre.

Les droites du complexe, situées dans un plan donné P, s'obtiendront facilement; si l'on appelle α', β', γ' et δ' les points où ce plan est percé par les droites A', B', C' et D', ce sont les asymptotes des coniques passant par les quatre points α', β', γ' et δ'. Ainsi *les droites du complexe, situées dans le plan* P, *enveloppent la courbe de troisième classe étudiée dans le* § I.

Pour obtenir les droites du complexe passant par un point donné O, imaginons les divers cônes du second ordre qui renferment les droites α', β', γ' et δ', et par O menons les plans tangents à ces cônes; *les arêtes de contact forment un cône du troisième degré qui, transporté parallèlement à lui-même, en sorte que son sommet vienne en* O, *donnera le cône du complexe.*

On voit que ce cône ne varie pas et se déplace parallèlement à lui-même lorsque le point O se meut sur une droite passant par le centre ε de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

13. Étant donné un système de cinq points A, B, C, D et E, il est facile de déterminer une surface de révolution du second ordre passant par ces points et ayant pour axe une droite parallèle à une droite donnée Δ.

Soient, en effet, α, β, γ, δ et ε les centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés, α étant par exemple le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre BCDE, β le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ACDE, etc.

Par le point α, menons une parallèle Δ' à Δ et imaginons le cône du second ordre (α) ayant pour sommet α et pour arêtes les droites Δ', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ et $\alpha\varepsilon$; par le point β, menons de même une parallèle Δ'' à Δ et imaginons le cône du second ordre (β), ayant pour sommet le point β et ayant pour arêtes les droites Δ'', $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ et $\beta\varepsilon$. Ces deux cônes, comme on le voit, ayant en commun la génératrice $\alpha\beta$, se coupent en outre suivant une cubique gauche.

Cela posé, les plans tangents menés respectivement aux cônes (α) et (β) le long des arêtes Δ' et Δ'' se coupent suivant une droite qui est l'axe d'une surface de révolution du second ordre passant par les points A, B, C, D et E.

14. On déduit encore de là la proposition suivante :

Cinq points étant donnés sur une surface de révolution du second ordre, les cinq centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former en considérant quatre quelconques de ces points sont sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.

D'où l'on conclut que le système de droites formé par les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre passant par cinq points donnés se confond avec le système formé par les asymptotes des cubiques gauches passant par cinq autres points fixes, ces derniers points étant les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres déterminés par les cinq premiers points.

III.

15. Les théorèmes qui précèdent sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces de révolution engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

On appelle *ligne spirique* (*) une courbe plane du

(*) *Voir*, sur la théorie des lignes spiriques, le Mémoire de M. de la quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et qui a pour points doubles les deux ombilics du plan.

Cette courbe a deux foyers singuliers situés sur son axe de symétrie. Si ces deux foyers coïncident, la courbe est un ovale de Descartes; dans le cas où l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, la courbe devient une *cataspirique* et elle n'est plus que du troisième degré. Enfin, si les deux foyers singuliers sont rejetés à l'infini, la courbe devient simplement une conique.

Cela posé, je m'appuierai sur la propriété suivante, que j'ai énoncée dans ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques* (*loc. cit.*) :

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une spirique et un point* M *mobile sur cette courbe, si, par les milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des droites respectivement perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur l'axe de la courbe deux divisions homographiques dont les points doubles sont les foyers singuliers situés sur cet axe.*

D'où la proposition suivante :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les trois couples de côtés opposés du quadrangle dérivé rencontrent l'axe de la courbe en six points en involution; les deux points doubles de cette involution partagent harmoniquement le segment déterminé par les deux foyers singuliers situés sur l'axe.

Gournerie, *Sur les lignes spiriques*, inséré dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV; ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques*, insérée dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (novembre 1869) et ma Note *Sur la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1878).

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers, situés sur l'axe de la courbe, sont sur une même conique.

16. Considérons la surface de révolution Σ engendrée par la rotation d'une spirique autour de son axe de symétrie; nous obtiendrons facilement les théorèmes qui suivent :

Une surface Σ *étant circonscrite à un tétraèdre* ABCD, *si, du centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces, ces quatre perpendiculaires et les droites qui joignent le centre de la sphère aux deux foyers singuliers de* Σ *sont situées sur un même cône du second ordre.*

Une surface Σ *passant par cinq points donnés, considérons les centres des cinq sphères circonscrites aux tétraèdres que l'on peut former en prenant quatre quelconques des points donnés; ces cinq centres et les deux foyers singuliers de la surface* Σ *sont situés sur une même cubique gauche.*