NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

# Lignes de courbure de la surface $z = L\cos y - L\cos x$

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 18 (1879), p. 201-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__201_0>

# LIGNES DE COURBURE DE LA SURFACE $z = \mathrm{L}\cos y - \mathrm{L}\cos x$;

Par M. A. de SAINT-GERMAIN.

M. Tisserand a étudié, dans ses *Exercices sur le Calcul infinitésimal* (p. 329), les lignes de courbure de la surface A représentée par l'équation

$$z = -\mathrm{L}\cos x - \mathrm{L}\cos y;$$

on peut faire, entre cette surface et la surface B que je considère, un rapprochement analogue à celui que leur mode de génération établit entre les deux paraboloïdes. Deux séries de droites rectangulaires menées dans le plan des $xy$ parallèlement à OX et à OY, à des distances de ces axes égales à un nombre impair quelconque de fois $\frac{\pi}{2}$, dessinent une sorte d'échiquier indéfini. Or les surfaces A et B sont formées d'une infinité de nappes égales, dont chacune se projette sur le plan des $xy$ à l'intérieur d'une case qui serait de même couleur que la case ayant son centre à l'origine, aucun point ne se projetant dans les autres cases; mais, tandis qu'une nappe de A peut être engendrée par une branche de la courbe $y = 0$, $z = -\mathrm{L}\cos x$, se mouvant parallèlement à elle-même de façon que son sommet glisse sur la courbe $x = 0$, $z = -\mathrm{L}\cos y$, concave comme la première vers les $z$ positifs, une nappe de B pourra être décrite par la même génératrice, mais en faisant glisser son sommet sur la ligne $x = 0$, $z = \mathrm{L}\cos y$, concave vers les $z$ négatifs; la surface B, comme le paraboloïde hyperbolique, aura partout des courbures opposées.

La projection des lignes de courbure de B sur le plan des $xy$ est donnée par une équation différentielle bien moins simple que pour A; nous effectuerons l'intégration à l'aide d'un procédé avantageux, et la discussion des courbes obtenues pourra offrir de l'intérêt. Il suffit d'appliquer la formule connue qui donne la projection des lignes de courbure d'une surface quelconque pour trouver sans difficulté, dans le cas de la surface B, l'équation

$$\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y (\operatorname{séc}^2 x\, dx^2 + \operatorname{séc}^2 y\, dy^2) - 2 \operatorname{séc}^2 x \operatorname{séc}^2 y\, dx\, dy = 0.$$

Après avoir multiplié cette équation par $\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y$, on peut lui donner la forme

$$\left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right)\frac{\sin^2 x\, dx^2}{\cos^4 x} + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\frac{\sin^2 y\, dy^2}{\cos^4 y} - 2\frac{\sin x \sin y\, dx\, dy}{\cos^3 x \cos^3 y} = 0.$$

En faisant $\frac{1}{\cos x} = u$, $\frac{1}{\cos y} = v$, on trouve

$$(1) \qquad (u\,dv - v\,du)^2 - (du^2 + dv^2) = 0.$$

Si $u$ et $v$ étaient des coordonnées rectangulaires, cette équation se simplifierait en passant aux coordonnées polaires; je suis donc conduit à poser

$$u = \rho \cos\omega, \quad v = \rho \sin\omega.$$

En effectuant le changement de variables, on déduit de l'équation (1)

$$\rho^4 d\omega^2 - (d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2) = 0,$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}}\, d\frac{1}{\rho}.$$

Désignant par $\alpha$ une constante arbitraire, j'ai l'intégrale

$$\alpha \pm \omega = \text{arc} \cos \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \cos(\alpha \pm \omega).$$

On se contentera du signe $+$ devant $\omega$, car, en posant $\alpha = 2\pi - \alpha'$, $\cos(\alpha - \omega)$ deviendrait $\cos(\alpha' + \omega)$. Je développe la dernière équation obtenue, je reviens aux variables primitives, et j'ai pour la projection P d'une ligne de courbure quelconque

$$\begin{aligned} 1 &= \rho \cos\omega \cos\alpha - \rho \sin\omega \sin\alpha \\ &= u \cos\alpha - v \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos y}, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos y = \frac{\sin\alpha \cos x}{\cos\alpha \cos x} = \text{X}.$$

On cherche comment varie X, par exemple, en construisant la courbe $y_1 = \text{X}$. Soit maintenant ABCD la case de l'échiquier au centre de laquelle est l'origine; nous nous bornerons à la portion de P comprise dans le carré ABCD. Quand $\alpha$ est compris entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$, P sera composé de deux branches séparées par OY et aboutissant aux quatre sommets de ABCD; pour les valeurs de $\alpha$ entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$, on a deux branches analogues, mais séparées par OX; elles correspondent aux lignes de courbure du second système; les valeurs de $\alpha$ comprises dans le deuxième ou le quatrième quadrant ne donnent pas de points utiles. Pour les valeurs limites de $\alpha$, P se réduit aux axes OX et OY ou aux côtés du carré.

Ajoutons que, tandis que A possède une infinité d'ombilics tout le long de ses sections principales, B n'a aucun de ces points.