H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 145-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__145_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[FIN (*)].

SUR LES ARCS DE LEMNISCATE.

La lemniscate est, comme l'on sait, une courbe telle que le produit de ses rayons vecteurs issus de deux points fixes est constant. Son équation en coordonnées polaires est, en prenant pour axe polaire la droite qui joint les points fixes et pour origine le milieu de cette droite,

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4 = b^4,$$

$2a$ désignant la distance des points fixes et b une constante.

M. Serret, dans un Mémoire inséré au tome VIII du *Journal de M. Liouville,* a montré que toute fonction elliptique de première espèce pouvait être représentée par deux arcs de lemniscate. Voici son analyse :

Soit $\frac{b}{a} < 1$, la courbe se compose de deux branches distinctes. On pose $\frac{b^2}{a^2} = \sin 2\psi$. Soient s'_0 et σ'_0 les deux arcs de lemniscate, dont les extrémités ont pour angles polaires θ_0 et θ_1, on a

$$s'_0 = \frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}\, d\theta$$

$$\sigma'_0 = \frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\psi}}\, d\theta.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 126.

On déduit de là, en ajoutant et en retranchant,

$$s'_0 + \sigma'_0 = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\psi}}$$

$$s'_0 - \sigma'_0 = \sqrt{2}\,\frac{b^2}{a}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{d'\theta}{\sqrt{\cos 2\theta + \cos 2\psi}}.$$

Si l'on pose, dans la première formule,

$$\sin\theta = \sin\psi \sin\varphi,$$

dans la seconde,

$$\sin\theta = \cos\psi \sin\varphi,$$

on a

$$s'_0 + \sigma'_0 = \frac{b^2}{a}\left[F(\sin\psi, \varphi_1) - F(\sin\psi, \varphi_0)\right]$$

$$s'_0 - \sigma'_0 = \frac{b^2}{a}\left[F(\cos\psi, \varphi_1) - F(\cos\psi, \varphi_0)\right].$$

On voit que les modules de $s'_0 + \sigma'_0$ et de $s'_0 - \sigma'_0$ sont complémentaires.

Un calcul un peu différent conduit aux mêmes conclusions quand on suppose $\frac{b}{a} > 1$; mais alors ce sont les arcs correspondant à des rayons vecteurs perpendiculaires qu'il faut désigner par s'_0, σ'_0.

La lemniscate de Bernoulli est la plus célèbre ; elle a pour équation

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

L'arc de cette courbe est donné par la formule

$$ds = \frac{a\sqrt{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Si l'on pose

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi,$$

on a

$$ds = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi}}.$$

On en conclut, en comptant convenablement l'arc,

$$s = a\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right)$$

ou bien

$$s = a\,\mathrm{F}\left[\frac{1}{2}, \operatorname{arc\,sin}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\right].$$

On trouve aussi

$$s = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2a}\right)}}.$$

AIRES DE QUELQUES COURBES.

La quadrature d'une courbe du troisième degré ne dépend absolument que des fonctions elliptiques; pour nous en convaincre, plaçons l'origine sur la courbe : l'équation de la courbe sera de la forme

$$\varphi_3(x, y) + 2\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0,$$

φ_1, φ_2, φ_3 désignant des polynômes homogènes de degrés 1, 2, 3. On peut l'écrire

$$x^2\varphi_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + 2x\,\varphi_2\left(1, \frac{y}{x}\right) + \varphi_1\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

et, en posant

$$y = tx,$$

on a

$$x^2\varphi_3(1, t) + 2x\,\varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0.$$

On en tire

$$x = \frac{-\varphi_2 \pm \sqrt{\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3}}{\varphi_3};$$

en appelant alors R un polynôme du quatrième degré, on voit que x est de la forme $f(t, \mathrm{R})$, où f désigne une fonction rationnelle; $\frac{dx}{dt}$ et $y = tx$ seront de la même forme, et par suite l'intégrale

$$\int y\,dx = \int y \frac{dx}{dt}\,dt$$

ne dépendra que des fonctions elliptiques.

Lorsqu'une courbe du quatrième degré a deux points doubles, on peut aussi exprimer son aire au moyen des fonctions elliptiques. En effet, au moyen d'une transformation homographique, on peut transporter les deux points doubles à l'infini : soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la courbe ainsi transformée ; on peut supposer que $z = 0$, $x = 0$ et $z = 0$, $y = 0$ soient les coordonnées des points doubles. Quand on fera

$$z = 0, \quad x = 0$$

dans les formules

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

elles devront être satisfaites ; les dérivées des termes du quatrième degré en x et y devront donc s'annuler pour $x = 0$, ce qui exige que le terme en y^4 et le terme en xy^3 soient nuls ; la dérivée $\frac{df}{dz}$ étant nulle pour $x = 0$, il faut que le terme en x^3 soit nul également ; on verrait de même que les termes $x^3 y$, et x^4 ainsi que y^3, disparaissent. L'équation de la courbe prend donc la forme

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}x^2y^2 + \mathrm{B}x^2y + \mathrm{C}xy^2 \\ &\quad + \mathrm{D}x^2 + \mathrm{E}xy + \mathrm{F}y^2 + \mathrm{G}x + \mathrm{H}y + \mathrm{K} = 0, \end{aligned}$$

et, si l'on résout cette équation par rapport à y, on trouve pour cette fonction une expression rationnelle par rapport à x et par rapport à un radical recouvrant un polynôme du quatrième degré.

SUR LES COURBES DE DEGRÉ m QUI ONT $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ POINTS DOUBLES.

On sait que $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ est le nombre maximum de points doubles que puisse posséder une courbe d'ordre m.

Une courbe d'ordre m qui possède $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles est quarrable par les fonctions algébriques et logarithmiques (y compris les fonctions circulaires inverses).

Il suffit de prouver que l'x et l'y de cette courbe sont fonctions rationnelles d'un même paramètre λ; pour y parvenir par les $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles D de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

d'ordre m, faisons passer une courbe d'ordre $m-2$. Cette courbe est déterminée quand on l'assujettit à passer par $\frac{1}{2}(m-2)(m+1)$ points; or, elle passe déjà par $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points D : on peut donc l'assujettir encore à

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+1) - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) = m-2$$

conditions. Nous l'assujettirons à rencontrer la courbe (1) en $m-3$ points fixes que nous appellerons A; elle contiendra alors dans son équation un paramètre arbitraire λ, et cette équation sera

$$(2) \qquad \varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0.$$

Mais cette courbe (2) coupe (1) en $m(m-2)$ points; sur ces $m(m-2)$ points, les points D comptent pour deux et équivalent à $(m-1)(m-2)$ points d'intersection; si l'on y ajoute les $m-1$ points A, on voit que

$$(m-1)(m-2) + m - 3 = m^2 - 2m - 1$$

points d'intersection des courbes (1) et (2) sont fixes et connus; il n'en reste plus que

$$m(m-2) - (m^2 - 2m - 1) = 1$$

qui soient variables. Si l'on forme alors la résultante des équations (1) et (2), toutes les racines x de cette résultante seront connues et indépendantes de λ, à l'exception d'une seule que l'on obtiendra par suite à l'aide d'une simple division et qui sera rationnelle en λ. Ainsi x et y s'exprimeront rationnellement en fonction de λ.

C. Q. F. D.

Réciproquement, on peut prouver que, *si x et y sont des fonctions rationnelles de λ de la forme $\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, $\frac{\chi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$, φ, χ, ψ étant de degrés m au plus, x et y seront les coordonnées d'une courbe d'ordre m ayant $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles.*

Posons, en effet,

$$(1) \qquad \frac{x}{\varphi(\lambda, \mu)} = \frac{y}{\chi(\lambda, \mu)} = \frac{z}{\psi(\lambda, \mu)},$$

z étant introduit ici pour l'homogénéité ainsi que μ (nous supposerons ultérieurement $z = 1$, $\mu = 1$). La courbe représentée par les équations (1) coupera la droite

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0$$

en m points, car les λ d'intersection seront donnés par la formule du degré m

$$a\varphi(\lambda,\mu)+b\chi(\lambda,\mu)+c\psi(\lambda,\mu)=0.$$

λ aura m valeurs et par suite x et y auront m valeurs simultanées.

Comptons maintenant les points d'inflexion ; ces points satisfont à l'équation (2) et aux suivantes :

$$(3)\qquad a\frac{dx}{d\lambda}+b\frac{dy}{d\lambda}+c\frac{dz}{d\lambda}=0,$$

$$(4)\qquad a\frac{d^2x}{d\lambda^2}+b\frac{d^2y}{d\lambda^2}+c\frac{d^2z}{d\lambda^2}=0;$$

or, en vertu du théorème des fonctions homogènes, (2) et (3) peuvent s'écrire

$$(5)\qquad a\left(x^2\frac{d^2x}{d\lambda^2}+2xy\frac{d^2x}{d\lambda d\mu}+y^2\frac{d^2x}{d\mu^2}\right)+\ldots=0,$$

$$(6)\qquad a\left(x\frac{d^2x}{d\lambda^2}+y\frac{d^2x}{d\lambda d\mu}\right)+\ldots=0;$$

la résultante des formules (4), (5), (6) donnera les λ des points d'inflexion. Or (5) et (6) se simplifient et peuvent s'écrire

$$a\frac{d^2x}{d\mu^2}+b\frac{d^2y}{d\mu^2}+c\frac{d^2z}{d\mu^2}=0,$$

$$a\frac{d^2x}{d\lambda d\mu}+b\frac{d^2\mu}{d\lambda d\mu}+c\frac{d^2z}{d\lambda d\mu}=0,$$

et la résultante cherchée prend la forme

$$\begin{vmatrix}\frac{d^2x}{d\lambda^2} & \frac{d^2y}{d\lambda^2} & \frac{d^2z}{d\lambda^2}\\ \frac{d^2x}{d\lambda d\mu} & \frac{d^2y}{d\lambda d\mu} & \frac{d^2z}{d\lambda d\mu}\\ \frac{d^2x}{d\mu^2} & \frac{d^2y}{d\mu^2} & \frac{d^2z}{d\mu^2}\end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est manifestement du degré $3(m-2)$; ainsi la courbe considérée possède $3(m-2)$ points d'inflexion. Or une courbe d'ordre m possède normalement $3m(m-2)$ points d'inflexion; celle que nous considérons en a donc perdu

$$3m(m-2)-3(m-2)=3(m-1)(m-2).$$

Or on sait que les points d'inflexion ne disparaissent que parce qu'ils se trouvent remplacés par des points singuliers. Chaque point double faisant disparaître six points d'inflexion, on en conclut que $\frac{3(m-1)(m-2)}{6}$ ou $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles se sont attachés à la courbe. C. Q. F. D.

Il faut bien remarquer que dans notre raisonnement nous avons tenu compte des points situés à l'infini, ce qui résulte de l'emploi des coordonnées homogènes. En second lieu, nous n'avons, en fait de points singuliers, considéré que des points doubles, mais il est clair que nos énoncés devront être corrigés si les points singuliers, au lieu d'être des points doubles, devenaient points triples ou seulement points de rebroussement.

Les théorèmes précédents sont dus à M. Clebsch qui les a établis, mais moins simplement, dans le *Journal de Crelle* (t. 64, p. 43).

SUR LES COURBES D'ORDRE m POSSÉDANT $\frac{1}{2}m(m-3)$ POINTS DOUBLES.

Les courbes d'ordre m possédant $\frac{1}{2}m(m-3)$ points doubles sont quarrables par les fonctions elliptiques.

Pour démontrer ce théorème, considérons une courbe

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$

d'ordre m, possédant $\frac{1}{2}m(m-3)$ points doubles **D**; ce nombre est égal à $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-1$, c'est-à-dire au maximum du nombre des points doubles moins un. Pour déterminer une courbe d'ordre $m-2$, il faut $\frac{1}{2}(m-2)(m+1)$ conditions ; on pourra donc assujettir une courbe d'ordre $m-2$ à passer par les $\frac{1}{2}m(m-3)$ points D et par

$$\frac{1}{2}(m-2)(m+1)-\frac{1}{2}m(m-3)-1=m-2$$

autres points de la courbe (1), que nous appellerons A. Cette courbe contiendra dans son équation un paramètre arbitraire λ et pourra être représentée sous la forme

$$(2)\qquad \varphi(x,y)+\lambda\psi(x,y)=0;$$

mais cette courbe (2) coupe la courbe (1) d'abord en $m(m-3)$ points confondus avec les points doubles D qui comptent pour deux, et en $m-2$ points A, ce qui fait en tout m^2-2m-2 points ; or les courbes (1) et (2) devant se couper en $m(m-2)$ points, il restera deux points que j'appellerai B sur la courbe (1) et par lesquels passera encore la courbe (2). Nous supposerons les points A fixes ; les points B dépendront alors de la valeur attribuée à λ ; nous les déterminerons comme il suit :

Par l'origine, imaginons une série de droites

$$(3)\qquad y=\alpha x,$$

passant par les intersections A, B, D des courbes (1) et (2) ; les coefficients angulaires α seront racines de l'équation

$$(4)\qquad (y_1-\alpha x_1)(y_2-\alpha x_2)(y_3-\alpha x_3)\ldots=0 \quad \text{ou} \quad R=0,$$

dans laquelle (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... sont les solutions communes à (1) et (2); on peut supposer que $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ sont les coordonnées des points B. Alors on voit: 1° que l'équation (4) est la résultante de (1), (2) et (3); 2° que cette résultante est divisible par le facteur

$$(y_1 - \alpha x_1)(y_2 - \alpha x_2),$$

que nous représenterons par

$$\text{(5)} \qquad A\alpha^2 + 2B\alpha + C = 0 \quad \text{ou} \quad R_1 = 0,$$

et qu'il sera facile de former. Ce facteur fera connaître les coefficients angulaires des droites allant de l'origine aux points B ; 3° la résultante $R = 0$ pouvant s'obtenir en éliminant x entre

$$f(x, \alpha x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, \alpha x) + \lambda\psi(x, \alpha x) = 0$$

sera de degré m par rapport à λ; mais comme, dans cette résultante, $x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$ sont indépendants de λ, le facteur $A\alpha^2 + 2B\alpha + C$ le contiendra seul et par suite l'équation (5) sera du degré m en λ.

On tire de (5)

$$\text{(6)} \qquad \alpha = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

en ne considérant que l'une des valeurs de α; la valeur correspondante de x s'obtiendra par les considérations suivantes : soient a_{ij} et b_{ij} les coefficients de $x^i y^j$ dans φ et ψ et $C_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij}$, faisons varier a_{ij}, b_{ij}, a_{kl}, b_{kl} de manière à ne pas altérer la résultante $R_1 = 0$; les quantités x ne varieront pas, et l'on aura

$$\frac{dR_1}{dC_{ij}} dC_{ij} + \frac{dR_1}{dC_{kl}} dC_{kl} = 0,$$

$$\frac{d(\varphi + \lambda\psi)}{dC_{ij}} dC_{ij} + \frac{d(\varphi + \lambda\psi)}{dC_{kl}} dC_{kl} = 0;$$

cette dernière formule peut s'écrire

$$x^i y^j dC_{ij} + x^k y^l dC_{kl} = 0,$$

et l'on en conclut

$$(7)\qquad \frac{dR_1}{dC_{ij}} : x^i y^j = \frac{dR_1}{dC_{kl}} : x^k y^l ;$$

de là plusieurs manières de se procurer x en fonction rationnelle de α et de λ, par exemple au moyen de l'équation

$$\frac{dR_1}{dC_{10}} : x = \frac{dR_1}{dC_{00}}.$$

Maintenant revenons à la formule (6), pour étudier la quantité $B^2 - AC$ placée sous le radical et la décomposer en facteurs. Pour cela annulons-la : l'équation $R_1 = 0$ aura une racine double; les droites allant de l'origine aux points B seront confondues, ce qui peut avoir lieu : 1° soit parce que les points B sont en ligne droite avec l'origine; 2° soit parce que les points B sont confondus.

1° Supposons d'abord les points B en ligne droite avec l'origine, x doit être indéterminé ; donc, dans les formules (7), les $\frac{dR_1}{dC_{ij}}$ doivent être nuls. Or on a

$$\frac{dR_1}{d\lambda} = \sum \frac{dR_1}{dC_{ij}} \frac{dC_{ij}}{d\lambda} = \sum \frac{dR_1}{dC_{ij}} b_{ij} = 0;$$

mais, l'équation (5) ayant une racine double, on a aussi

$$\frac{dR_1}{d\alpha} = 0;$$

or, quand on pose $\frac{dR_1}{d\alpha} = 0$ ou $A\alpha + B = 0$, ou $\alpha = -\frac{A}{B}$. R_1 se réduit à

$$R_1 = -\frac{B^2 - AC}{A};$$

en égalant $\frac{dR_1}{d\lambda}$ à zéro, on a alors

$$\frac{1}{A}\frac{d(B^2 - AC)}{d\lambda} = -\frac{d\frac{1}{A}}{d\lambda}(B^2 - AC) = 0;$$

donc enfin $B^2 - AC$ s'annule en même temps que sa dérivée pour les valeurs λ pour lesquelles deux points B sont en ligne droite avec l'origine ; $B^2 - AC$ aura donc autant de facteurs doubles qu'il y aura de valeurs de λ pour lesquelles les points B sont en ligne droite avec l'origine, et l'on pourra écrire

$$\sqrt{B^2 - AC} = \Theta(\lambda)\sqrt{V}.$$

2° Supposons maintenant les points B confondus, les valeurs de λ pour lesquelles cette circonstance se présentera s'obtiendront en exprimant que les courbes (1) et (2) se touchent : alors aux points de contact on aura

$$\frac{df}{dx} : \left(\frac{d\varphi}{dx} + \lambda\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{df}{dy} : \left(\frac{d\varphi}{dy} + \lambda\frac{d\psi}{dy}\right) = \frac{df}{dz} : \left(\frac{d\varphi}{dz} + \lambda\frac{d\psi}{dz}\right);$$

en égalant ces rapports à $\frac{1}{\rho}$, en chassant les dénominateurs, puis en éliminant ρ et λ, on trouve

$$J = 0, \tag{8}$$

J désignant le déterminant de f, φ, ψ. L'équation (8) est celle de la *jacobienne* des courbes $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; or on sait que (SALMON, *Leçons d'Algèbre supérieure*, traduites par Bazin, p. 72) si les courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont de même degré : 1° la jacobienne passe par les points communs aux trois courbes ; 2° si $f = 0$ a un point singulier en D, la jacobienne y a un point singulier avec les mêmes tangentes et par conséquent coupe $f = 0$ en six points confondus en D ; 3° la jacobienne touche la courbe f aux points A et par conséquent y coupe f en deux points confondus.

Or la jacobienne est de degré

$$m - 1 + 2(m - 2) = 3m - 7;$$

elle coupe $f = 0$ en $m(3m - 7)$ points dont il faut défalquer les points D au nombre de

$$6 \frac{1}{2} m(m - 3) = 3m(m - 3),$$

et les points A au nombre de $2(m - 2)$; il reste donc

$$m(3m - 7) - 3m(m - 3) - 2(m - 2) = 4$$

points où la jacobienne peut rencontrer $f = 0$ et par suite où la courbe (2) peut toucher (1), et par suite quatre valeurs de λ pour lesquelles $B^2 - 4AC$ s'annule par le fait du contact de (1) et (2). Le polynôme V est donc du quatrième degré en λ; d'où il résulte que l'α et par suite l'x et l'y d'un point variable B de la courbe $f = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre λ et d'un radical de la forme

$$\sqrt{\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$

ce qui démontre le théorème énoncé plus haut.

La première démonstration de ce théorème est due à M. Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 210).

Remarque. — On pourra représenter les coordonnées x, y de la courbe (1) sous la forme

$$x = F\left[\lambda, \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}\right],$$
$$y = \Phi\left[\lambda, \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)}\right],$$

à l'aide d'une transformation rationnelle opérée sur la variable λ; si l'on fait alors $\lambda = \operatorname{sn} t$, on aura

$$x = G(\operatorname{sn} t) + \operatorname{sn}' t\, H(\operatorname{sn} t)$$
$$y = K(\operatorname{sn} t) + \operatorname{sn}' t\, L(\operatorname{sn} t),$$

G, H, K, L désignant des fonctions rationnelles. En effet, le radical entrera si l'on veut dans x et y sous forme linéaire ; or il est égal à $\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t$, c'est-à-dire à $\mathrm{sn}'t$.

C. Q. F. D.

Ainsi, quand une courbe a son maximum de points doubles moins 1, ses coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un même sinus amplitude et sa dérivée, ou, si l'on veut encore, sont des fonctions doublement périodiques de même période d'une même variable.

QUELQUES COURBES REMARQUABLES DONT L'ÉQUATION DÉPEND DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Lorsque l'on cherche une courbe plane dont le rayon de courbure soit proportionnel à l'inverse de l'abscisse, on est conduit à l'équation

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}}\, dx.$$

Cette courbe est une élastique, on la rencontre encore quand on cherche parmi les courbes isopérimètres celle qui engendre le volume de révolution minimum ; en transformant convenablement les coordonnées, on peut prendre $c = 0$: alors on a $\frac{dy}{dx} = 0$, quand $x = 0$, et

$$y = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

ou

$$y = \int_0^x \frac{x^2\, dx}{a^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}}.$$

Si l'on fait $\frac{x}{a} = t$, on a

$$y = \int_0^t \frac{at^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+t^2)}};$$

or, en prenant le module k égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, en sorte que $k^2 = k'^2$, on a

$$\mathrm{cn}'\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1-\mathrm{cn}^2\theta)(1+\mathrm{cn}^2 t)};$$

si donc on fait

$$t = \mathrm{cn}\,\theta, \quad dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1-t^2)(1+t^2)}\,d\theta,$$

on aura

$$y = -\int_\theta^{\pm K} a\frac{\sqrt{2}}{2}\,d\theta\,\mathrm{cn}^2\theta = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\int_\theta^{\pm K}(1-\mathrm{sn}^2\theta)\,d\theta;$$

la limite inférieure est d'ailleurs arbitraire si l'on choisit convenablement l'origine : on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\theta + \dfrac{a\sqrt{2}}{4}Z(\theta), \\ x = a\,\mathrm{cn}\,\theta. \end{array}\right.$$

La courbe de M. Delaunay engendrée par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur une droite a pour équation

$$dy = \frac{(x^2 \pm b^2)\,dx}{\sqrt{4a^2x^2 - (x^2 - b^2)^2}};$$

son abscisse et son ordonnée s'exprimeront facilement aussi par les fonctions elliptiques. Dans cette courbe, la moyenne harmonique du rayon de courbure et de la normale est constante.

SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT.

Les équations du mouvement d'un corps solide qui présente un point fixe et qui n'est sollicité par aucune force extérieure sont, comme on sait,

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)pq. \end{cases}$$

A, B, C sont les moments d'inertie principaux relatifs au point fixe; p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée autour des axes principaux relatifs au même point; enfin, t est le temps.

L'analogie entre les équations (1) et celles qui lient entre eux $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ et leurs dérivées est telle, que l'on est tenté de poser

$$\begin{aligned} p &= \alpha \operatorname{cn} g(t - \tau), \\ q &= \beta \operatorname{sn} g(t - \tau), \\ r &= \gamma \operatorname{dn} g(t - \tau), \end{aligned}$$

α, β, γ, g, τ et le module k désignant des constantes arbitraires; et l'on satisfera effectivement aux formules (1) si, observant que

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}' x &= -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x, \\ \operatorname{sn}' x &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \\ \operatorname{dn}' x &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x, \end{aligned}$$

on prend

$$(a)\qquad \begin{cases} \alpha = gk\sqrt{\dfrac{BC}{(A - B)(A - C)}}, \\ \beta = gk\sqrt{\dfrac{AC}{(A - B)(B - C)}}, \\ \gamma = g\sqrt{\dfrac{AB}{(A - C)(B - C)}}. \end{cases}$$

Ces formules, auxquelles on est conduit ainsi par la méthode des coefficients indéterminés, fourniront pour α, β, γ des valeurs réelles si l'on a $A > B > C$, ce qu'il est toujours permis de supposer.

Les trois arbitraires de la solution sont g, k, τ. On peut faire abstraction de la dernière τ, et, en comptant convenablement le temps, poser

$$p = \alpha \operatorname{cn} gt, \quad q = \beta \operatorname{sn} gt, \quad r = \gamma \operatorname{dn} gt. \tag{2}$$

Les formules (1) sont donc intégrées.

Mais, pour résoudre complétement le problème, il ne suffit pas de connaître p, q, r, il faut encore calculer les valeurs des angles θ, φ, ψ, qui, dans les formules de transformation de coordonnées d'Euler, servent à définir la position des axes principaux d'inertie par rapport à trois axes fixes passant au point fixe. On démontre dans les Traités de Mécanique que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Prenons le plan du maximum des aires, ou plan invariable, pour plan des xy. On sait que Ap, Bq, Cr sont les moments des quantités de mouvement relatives aux axes principaux. Si donc on désigne par G la constante des aires $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$, on aura

$$Ap = G\cos(z, A), \quad Bq = G\cos(z, B), \quad Cr = G\cos(z, C),$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} Ap &= G \sin\theta \sin\varphi, \\ Bq &= G \sin\theta \cos\varphi, \\ Cr &= G\cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

La constante G est facile à calculer au moyen de k et de g. De ces trois formules on tire θ et φ; il reste à calculer l'angle ψ. Pour cela, entre les formules (3), éliminons $\frac{d\theta}{dt}$, nous aurons

$$p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$$

ou

$$d\psi = \frac{p \sin\varphi + q \cos\varphi}{\sin\theta} dt.$$

Éliminons φ et θ; de là, au moyen des formules (4), nous aurons

$$d\psi = \mathrm{G} \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2}{\mathrm{G}^2 - \mathrm{C}^2 r^2} dt = \mathrm{G} \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2}{\mathrm{A}^2 p^2 + \mathrm{B}^2 q^2} dt,$$

ou enfin

$$(5) \qquad d\psi = \mathrm{G} \frac{\mathrm{A}\alpha^2 \operatorname{cn}^2 gt + \mathrm{B}\beta^2 \operatorname{sn}^2 gt}{\mathrm{A}^2\alpha^2 \operatorname{cn}^2 gt + \mathrm{B}^2\beta^2 \operatorname{sn}^2 gt} dt.$$

Posons, pour abréger

$$(6) \qquad gt = x;$$

nous aurons alors

$$d\psi = \frac{\mathrm{G}}{g} \frac{\mathrm{A}\alpha^2 \operatorname{cn}^2 x + \mathrm{B}\beta^2 \operatorname{sn}^2 x}{\mathrm{A}^2\alpha^2 \operatorname{cn}^2 x + \mathrm{B}^2\beta^2 \operatorname{sn}^2 x} dx.$$

Remplaçons $\operatorname{cn}^2 x$ par $1 - \operatorname{sn}^2 x$, et α, β, γ par leurs valeurs (a); nous aurons

$$d\psi = \frac{\mathrm{G}}{g} \frac{\mathrm{B} - \mathrm{C} + (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \operatorname{sn}^2 x}{\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{C}) + \mathrm{C}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \operatorname{sn}^2 x} dx.$$

Posons

$$(7) \qquad \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{B} - \mathrm{C}}{\mathrm{A} - \mathrm{B}}} = \sqrt{-1} \operatorname{sn} \sqrt{-1}\, a,$$

et a sera réel, puisque $\operatorname{sn} a$ est une fonction impaire;

nous aurons alors

$$d\psi = \frac{G}{gC}\,\frac{\dfrac{B-C}{A-B} + \mathrm{sn}^2 x}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}\,dx,$$

ou

$$d\psi = \frac{G}{gC}\,\frac{\mathrm{sn}^2 x - \dfrac{C}{A}\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}\,dx,$$

ce que l'on peut écrire

$$(8) \qquad \psi = \frac{G}{gCA}\int \frac{A\,\mathrm{sn}^2 x - C\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}\,dx.$$

Désignons par $F(x)$ la quantité placée sous le signe $\int$, en sorte que

$$\psi = \frac{G}{gAC}\int F(x)\,dx.$$

Nous allons, pour pouvoir intégrer, décomposer $F(x)$ en éléments simples, par la méthode de M. Hermite. Nous désignerons par Γ l'intégrale de

$$F(z)\,\frac{H'(z-x)}{H(z-x)} = f(z),$$

prise le long d'un parallélogramme de côtés $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$ (périodes des fonctions elliptiques). Cette quantité Γ est indépendante de x; elle est égale à la somme des résidus de la fonction $f(z)$ pris à l'intérieur du parallélogramme en question. Si l'on suppose que ce parallélogramme contienne le point x, le résidu relatif à ce point sera $F(x)$; quant aux résidus relatifs aux autres infinis $a\sqrt{-1}$ et $-a\sqrt{-1}$, ils sont de la forme

$$\frac{H'(a\sqrt{-1}-x)}{H(a\sqrt{-1}-x)},$$

multipliée par la limite de

$$\frac{(x - a\sqrt{-1})(\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1})}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}},$$

pour $x = a\sqrt{-1}$; or cette limite est

$$\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{2\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}'\,a\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{2\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}};$$

ainsi donc on a

$$\begin{aligned}\Gamma = {} & \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(a\sqrt{-1} - x)}{\mathrm{H}(a\sqrt{-1} - x)}\,\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(a\sqrt{-1} + x)}{\mathrm{H}(a\sqrt{-1} + x)}\,\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) = {} & \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{C}\,\mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a\sqrt{-1}} \\ = {} & \Gamma - \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}}{\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ & \times\left[\frac{\mathrm{H}'(a\sqrt{-1} + x)}{\mathrm{H}(a\sqrt{-1} + x)} + \frac{\mathrm{H}'(a\sqrt{-1} - x)}{\mathrm{H}(a\sqrt{-1} - x)}\right].\end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans (8), on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\psi = {} & \frac{\mathrm{G}\Gamma}{g\mathrm{AC}}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{G}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}{g\mathrm{AC}}\,\frac{\mathrm{sn}\,a\sqrt{-1}}{\mathrm{cn}\,a\sqrt{-1}\,\mathrm{dn}\,a\sqrt{-1}} \\ & \times \log\frac{\mathrm{H}(x - a\sqrt{-1})}{\mathrm{H}(x + a\sqrt{-1})}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule se simplifie beaucoup quand on remplace

G par sa valeur. On a

$$\begin{aligned} G^2 &= A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \\ &= A^2\alpha^2\operatorname{cn}^2 x + B^2\beta^2\operatorname{sn}^2 x + C^2\gamma^2\operatorname{dn}^2 x; \end{aligned}$$

si (ce qui est permis, puisque G est constant) on fait $x = 0$, on a

$$G^2 = A^2\alpha^2 + C^2\gamma^2$$

et, en remplaçant α et γ par leurs valeurs (a),

$$G^2 = g^2 \frac{ABC}{A - C} \frac{Al^2(B - C) + C(A - B)}{(A - B)(B - C)};$$

d'un autre côté, si, à l'aide de (7), on calcule cn $a\sqrt{-1}$ et dn $a\sqrt{-1}$, et si alors on forme la quantité

$$\frac{1}{2}\frac{G(A - C)}{gAC}\frac{\operatorname{sn} a\sqrt{-1}}{\operatorname{cn} a\sqrt{-1}\operatorname{dn} a\sqrt{-1}},$$

on la trouve, réductions faites, égale à $\frac{\sqrt{-1}}{2}$; il en résulte que la formule (9) se réduit à

$$\psi = \frac{G\Gamma x}{gAC} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{H(x - a\sqrt{-1})}{H(x + a\sqrt{-1})}.$$

On peut introduire, comme l'a fait Jacobi, la fonction Θ à la place de H, en observant qu'à un facteur constant près on a

$$H(x - a\sqrt{-1}) = \Theta(x - a\sqrt{-1} - K'\sqrt{-1})e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x},$$

$$H(x + a\sqrt{-1}) = \Theta(x + a\sqrt{-1} + K'\sqrt{-1})e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}x}.$$

Si donc on fait $a + K' = \zeta$, on aura, en négligeant une constante,

$$(10) \qquad \psi = \frac{G\Gamma x}{gAC} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x - \zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x + \zeta\sqrt{-1})},$$

Rueb, en modifiant des formules données par Legendre, était parvenu par une tout autre voie à ces résultats; Jacobi est allé plus loin en calculant encore les lignes trigonométriques de ψ de manière à revenir, au moyen des formules d'Euler, aux neuf cosinus qui définissent la position du corps. Indiquons rapidement la marche qu'il a suivie.

La formule (10), en ayant égard à (6), devient

$$\psi = \frac{\mathrm{G}r\,t}{\mathrm{AC}} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})};$$

si l'on pose

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\log\frac{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})}, \qquad \frac{\mathrm{G}r}{\mathrm{AC}} = n,$$

on aura

$$\psi = nt - \psi_1,$$

et ψ se composera d'une partie proportionnelle au temps (et l'on pourra appeler la quantité n le moyen mouvement) et d'une partie ψ_1 dont nous allons calculer le sinus et le cosinus. On a

$$e^{\psi_1\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\Theta(x+\zeta\sqrt{-1})}{\Theta(x-\zeta\sqrt{-1})}},$$

et l'on en conclut facilement $\cos\psi_1$ et $\sin\psi_1$. Pour plus de développements, nous renverrons au Mémoire de Jacobi inséré dans ses *Mathematische Werke*, t. XI, p. 139, écrit en français.

MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE.

Prenons pour axe des z la verticale descendante du point de suspension, pour plan des xy le plan horizontal passant par le même point. Soient r la longueur du pendule, θ sa colatitude, ψ sa longitude : le théorème des forces vives donnera

$$(1) \qquad r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2gr\cos\theta + a,$$

et celui des aires

$$(2) \qquad r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = c.$$

a et c sont deux constantes dont nous allons fixer la valeur. Soient $v_0^2 = 2gh_0$ la vitesse initiale du mobile, h sa hauteur initiale au-dessus du point le plus bas; en faisant $t = 0$ dans (1), nous aurons

$$v_0^2 = 2gr\cos\theta_0 + a,$$

ou

$$2gh_0 = 2gh + a;$$

d'où

$$(3) \qquad a = 2g(h_0 - h).$$

Désignons par μ l'angle que v_0 fait avec l'horizon. En faisant $t = 0$, $\theta = \theta_0$ dans (2), nous aurons

$$r^2\sin^2\theta_0\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = c;$$

mais $r\sin\theta_0\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ est égal à $v_0\cos\mu$ et $r\sin\theta_0$ est égal à $\sqrt{r^2 - h^2}$, on a donc

$$(4) \qquad c = \sqrt{r^2 - h^2}\, v_0\cos\mu = \sqrt{2gh_0(r^2 - h^2)}\cos\mu.$$

Maintenant, entre (1) et (2), éliminons $\frac{d\psi}{dt}$, nous aurons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(2gr\cos\theta + a)r^2\sin^2\theta - c^2}{r^4\sin^2\theta}.$$

Si nous posons

$$(6) \qquad r\cos\theta = z,$$

nous aurons

$$(7) \qquad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (2gz + a)(r^2 - z^2) - c^2$$

ou, en vertu de (3) et (4),

$$r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g[(z + h_0 - h)(r^2 - z^2) - h_0(r^2 - h^2)\cos^2\mu].$$

Si l'on substitue à z, dans le second membre, $-\infty$, $-r$, h, $+r$, on obtient des résultats ayant pour signes $+$, $-$, $+$, $-$; on peut donc poser

$$(8) \qquad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

α, β, γ désignant des quantités réelles dont deux sont comprises entre $-r$ et $+r$, et dont la troisième est négative et moindre que $-r$.

On sait que, pour ramener l'équation (8) à celle qui définit la fonction elliptique, il faut poser $z = \alpha + pu^2$; posons donc

$$(9) \qquad z = \alpha + p\,\mathrm{sn}^2\omega t;$$

nous aurons, au lieu de (8), en écrivant s au lieu de $\mathrm{sn}\,\omega t$ et en désignant par k le module inconnu de $\mathrm{sn}\,\omega t$,

$$\begin{aligned} s^4(2r^2\omega^2pk^2 + gp^2) \\ + s^2[(1+k^2)\,2r^2\omega^2p + gp(2\alpha - \beta - \gamma)] \\ + 2r^2\omega^2p + g(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Cette formule aura lieu, quel que soit s, si

$$\frac{2r^2}{g}\omega^2k^2 = -p,$$

$$\frac{2r^2}{g}(1+k^2)\omega^2 = 2\alpha - \beta - \gamma,$$

$$\frac{2r^2}{g}\omega^2p = -(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma).$$

En éliminant ω par division, on en tire

$$\frac{k^2}{1+k^2} = \frac{-p}{2\alpha-\beta-\gamma}, \quad \frac{k^2}{1} = \frac{p^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)};$$

d'où, égalant les valeurs de k^2,

$$-p = \frac{p^2+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{2\alpha-\beta-\gamma}.$$

En résolvant par rapport à p, on trouve $-(\alpha-\beta)$ ou $-(\alpha-\gamma)$; alors $k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$ ou $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$. Pour que k soit réel, il faudra que $\alpha-\beta$ et $\alpha-\gamma$ soient de même signe, ce à quoi on arrivera en prenant pour α la racine positive la plus grande. Enfin, pour que k soit moindre que l'unité, on prendra $p=-(\alpha-\beta)$, $k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$, et l'on supposera que γ soit la plus petite des racines; alors on aura

$$(10) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g(\alpha-\gamma)}{2r^2}}, \quad k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma};$$

la formule (9) donne alors

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2\,\omega t,$$

ou bien

$$z = \alpha\,\mathrm{cn}^2\,\omega t + \beta\,\mathrm{sn}^2\,\omega t,$$

ou, en vertu de (6),

$$(11) \qquad r\cos\theta = \alpha\,\mathrm{cn}^2\,\omega t + \beta\,\mathrm{sn}^2\,\omega t.$$

Maintenant, la formule (2) donne

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{r^2\sin^2\theta},$$

et, en vertu de (11),

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{c\,dt}{r^2-(\alpha\,\mathrm{cn}^2\omega t+\beta\,\mathrm{sn}^2\omega t)^2} \\ &= \frac{c\,dt}{2r}\left(\frac{1}{r-\alpha\,\mathrm{cn}^2\omega t-\beta\,\mathrm{sn}^2\omega t} + \frac{1}{r+\alpha\,\mathrm{cn}^2\omega t+\beta\,\mathrm{sn}^2\omega t}\right). \end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\frac{2r}{c}(\psi - \psi_0) = \frac{1}{r-\alpha}\int_0^t \frac{dt}{1 + \frac{\alpha-\beta}{r-\alpha}\operatorname{sn}^2\omega t} + \frac{1}{r+\alpha}\int_0^t \frac{dt}{1 - \frac{\alpha-\beta}{r+\alpha}\operatorname{sn}^2\omega t}.$$

Les deux intégrales qui figurent ici sont de seconde espèce; $\frac{2r}{c}(\psi - \psi_0)$ se composera donc d'un terme proportionnel à t et de termes périodiques de la forme

$$\frac{\Theta'(\omega t + \varepsilon)}{\Theta(\omega t + \varepsilon)}.$$

Si donc on imprimait au pendule un mouvement uniforme de rotation convenable, son mouvement relatif serait périodique.