NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 126-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__126_1>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).[1]

PREMIÈRES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. — FORMULES FONDAMENTALES.

Dans les applications du Calcul intégral, les fonctions trigonométriques se présentent sous leurs formes inverses quand on ne les introduit pas directement dans le calcul sous leur forme normale. Il faudra donc nous attendre à rencontrer par analogie les intégrales elliptiques avant les fonctions directes : aussi allons-nous revenir un instant sur ces fonctions inverses.

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 537. Le lecteur est prié de supprimer, dans ce dernier article, le théorème de Poncelet, qu'une erreur de mise en pages y a fait intercaler et qu'on retrouve plus loin dans ce Chapitre.

Nous avons posé

$$(1)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi) = F(k,\varphi),$$

et de là nous tirons

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} F,\quad \varphi = \operatorname{am} F.$$

Nous poserons encore, avec Legendre,

$$(2)\qquad \int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = E(\varphi) = E(\varphi, k).$$

La fonction (1) est l'intégrale de première espèce, l'intégrale $E(\varphi)$ est l'intégrale de seconde espèce de Legendre : elle diffère de celle de Jacobi. On a

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2\int_0^{\varphi} d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

La seconde intégrale est celle de Jacobi, qui se reduit à $Z(x) = k^2\int_0^x \operatorname{sn}^2 x\, dx$ quand on fait $\sin\varphi = \sin\operatorname{am} x$; nous la désignerons par $J(\varphi)$, de sorte que $J(\operatorname{am} x) = Z(x)$; nous aurons alors

$$(3)\qquad E(\varphi) = F(\varphi) - J(\varphi),\quad J(\varphi) = F(\varphi) - E(\varphi).$$

La fonction elliptique de seconde espèce $E(\varphi)$ représente un arc d'ellipse dont les coordonnées seraient

$$x = a\sin\varphi,\quad y = b\cos\varphi;$$

φ est alors le complément de l'anomalie excentrique, et l'on trouve

$$ds = a\,d\varphi\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi},$$

et, par suite, en prenant a pour unité, et en faisant

$1 - b^2 = k^2$,

$$ds = d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi};$$

on a donc

$$s = \mathrm{E}(\varphi, \sqrt{1-b^2}),$$

ce qu'il fallait prouver.

Si, pour évaluer l'arc d'hyperbole, on posait

$$x = a\frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2}, \quad y = b\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2},$$

on trouverait

$$ds = a\,d\psi\sqrt{1 + \frac{a^2+b^2}{4a^2}(e^\psi - e^{-\psi})^2}.$$

Par une suite de transformations, on finirait par ramener cette expression aux fonctions elliptiques, mais il est plus simple de suivre une autre voie pour évaluer l'arc d'hyperbole; nous prendrons l'équation de cette courbe sous la forme

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

ou

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Si l'on forme l'élément d'arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve

$$ds = \frac{\left(a^2 + \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2\right)dx}{\sqrt{(a^2+x^2)\left(a^2 + \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2\right)}},$$

ce que l'on peut écrire, en posant d'abord $\frac{x}{a} = x'$,

$$ds = \frac{2\left(1 + \frac{a^2+b^2}{a^2}x'^2\right)a\,dx'}{\sqrt{(1+x'^2)\left(1 + \frac{a^2+b^2}{a^2}x'^2\right)}};$$

après quoi, conformément aux règles que nous avons données pour la réduction des fonctions elliptiques, nous poserons

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\,x' = \frac{x''}{\sqrt{1-x''^2}};$$

nous aurons alors

$$ds = \frac{dx''}{\sqrt{(1-x''^2)\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}x''\right)}}\;\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2(1-x''^2)}}.$$

Posons

$$x'' = \sin\varphi,\quad \frac{b^2}{a^2+b^2} = k^2,$$

et nous aurons

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\;\frac{a\sqrt{1-k^2}}{\cos^2\varphi}.$$

Nous poserons

$$(4)\qquad \Upsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2}}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

l'arc d'hyperbole sera donc représenté par $a\Upsilon(\varphi)$ et simplement par $\Upsilon(\varphi)$, quand a sera l'unité. La suite des transformations que nous venons d'effectuer revient à faire

$$\sqrt{\frac{1}{1-k^2}}\,x' = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x = ax' = a\sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tang}\varphi,$$

$$y = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}}\;\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

COMPARAISON DES ARCS D'ELLIPSE ET D'HYPERBOLE.

Nous continuerons dans ce paragraphe le numérotage de formules employé dans le précédent et nous prouverons d'abord que la fonction Υ se ramène à E et à F (il est bon de remarquer que Υ est un cas particulier de l'intégrale de troisième espèce) ; on a

$$\Upsilon(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on observe alors que

$$d\tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = d\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi\sqrt{}} - \frac{k^2\tang^2\varphi}{\sqrt{}} - \frac{k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{}}\right)$$
$$= d\varphi\left[\frac{(1-k^2)}{\cos^2\varphi\sqrt{}} + \frac{k^2}{\sqrt{}} - k^2\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{}}\right],$$

on aura, en intégrant et en ayant égard à (1), (2), (3),

$$(5)\qquad \tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Upsilon(\varphi) + (k^2-1)\,\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi):$$

la fonction $\Upsilon(\varphi)$ se ramène donc à $\mathrm{F}(\varphi)$ et à $\mathrm{E}(\varphi)$.

Mais on peut aller plus loin, et exprimer $\Upsilon(\varphi)$ au moyen de deux fonctions E d'amplitude et de modules différents. Ce théorème sera démontré si l'on prouve que $\mathrm{F}(\varphi)$ peut être évalué en fonction de deux fonctions E ; ce théorème célèbre, en vertu duquel un arc d'hyperbole peut être mesuré par deux arcs d'ellipse, est dû à Landen et porte son nom.

Or la transformation de Landen permet d'écrire

$$(6)\qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = \frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et la relation qui en résulte pour les angles φ et φ_1 peut s'écrire

$$(7)\qquad \sin^2\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right);$$

d'ailleurs,

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}.$$

Si nous multiplions membre à membre (6) et (7), nous aurons

$$\frac{1}{k_1^2} J(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{4k} J(k, \varphi) + \frac{1+k}{4} F(k, \varphi) - \frac{1+k}{4} \sin\varphi,$$

ou, en vertu de (3),

$$\frac{1}{k_1^2}[F(k_1, \varphi_1) - E(k_1, \varphi_1)]$$
$$= \frac{1+k}{4k}[F(k,\varphi) - E(k, \varphi)] + \frac{1+k}{4} F(k, \varphi) - \frac{1+k}{4} \sin\varphi;$$

mais la formule (6) donne

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2} F(k, \varphi);$$

en remplaçant alors $F(k_1, \varphi_1)$ par cette valeur, on a

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}[E(k, \varphi) - (1+k) E(k_1, \varphi_1) + k \sin\varphi],$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

SUR L'ADDITION DES INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Les questions traitées ci-dessus, quoique se rattachant à la théorie des fonctions elliptiques, pourraient se traiter sans avoir aucune notion de ces fonctions; il était bon de les signaler, parce qu'elles ont fait naître des recherches ultérieures et ont été le point de départ de la théorie: on sait qu'Euler avait deviné l'intégrale algébrique de l'équation d'où dépend le théorème de l'addition des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Il convient de faire connaître ici une méthode géométrique due à Lagrange, qui a dû contribuer pour sa part à faciliter les premières recherches.

Soient φ, ψ, μ les côtés d'un triangle sphérique et C l'angle opposé à μ; posons

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 \mu} = k^2, \quad \cos C = \pm\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}.$$

Supposons actuellement que l'on fasse varier φ et ψ en laissant μ constant, ainsi que l'angle C, nous aurons

$$(1) \qquad \cos\mu = \cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu};$$

mais, le côté μ variant seulement de position, ses extrémités décrivent sur les côtés φ et ψ des éléments $d\varphi$ et $d\psi$ dont les projections sur μ doivent être égales. En effet, soient AA′ et BB′ les positions voisines du côté μ, si du point O où se croisent ces positions, comme pôle, on décrit les arcs BC, A′C, comme OB = OC, A′O = C′O, il faut bien que AC = B′C′. Or

$$AC = d\varphi\cos(\varphi, \mu), \quad B'C' = d\psi\cos(\psi, \mu):$$

donc

$$d\varphi\cos(\varphi, \mu) = d\psi\cos(\psi, \mu),$$

ou

$$d\varphi\sqrt{1 - \sin^2(\varphi, \mu)} = d\psi\sqrt{1 - \sin^2(\psi, \mu)};$$

mais

$$\frac{\sin(\varphi, \mu)}{\sin\psi} = \frac{\sin C}{\sin\mu} = k:$$

donc

$$\sin(\varphi, \mu) = k\sin\psi.$$

La formule précédente donne alors

$$(2) \qquad d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} = \pm d\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

La formule (1) est donc l'intégrale de celle-ci, μ y est constant; si l'on fait alors $\Psi = 0$, on a $\mu = \varphi$. Si l'on écrit (2) ainsi

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu),$$

$F(\mu)$ désignant la constante, μ se réduira à φ pour $\psi = 0$, et (1) sera équivalente à la relation transcendante (4); la formule (1) devant avoir lieu pour $\mu = 0$ et $\varphi = -\psi$, il faudra alors prendre le signe — devant le radical. Que l'on fasse $\varphi = \operatorname{am} a$, $\psi = \operatorname{am} b$, $\mu = \operatorname{am}(a+b)$, on aura alors

$$\operatorname{cn}(a+b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a+b).$$

Cette équation, combinée avec les suivantes :

$$\operatorname{cn} a = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 a},$$

$$\operatorname{dn} a = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a},$$

fera connaître $\operatorname{cn}(a+b)$, $\operatorname{dn}(a+b)$ et $\operatorname{sn}(a+b)$: on retrouve ainsi les formules fondamentales de l'addition des fonctions elliptiques. On peut retrouver ces formules en cherchant les lignes de courbure des surfaces du second ordre : c'est ce que nous allons voir.

LIGNES DE COURBURE DE L'HYPERBOLOÏDE.

On peut considérer les lignes de courbure de l'hyperboloïde gauche comme les lignes bissectrices des génératrices. Or les génératrices ont pour équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \qquad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\psi - \cos\psi,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\psi + \sin\psi.$$

Les paramètres φ et ψ servent à caractériser une génératrice; en les prenant pour variables, les équations différentielles des lignes de courbure prennent la forme

$$\Phi\, d\varphi = \pm \Psi\, d\psi.$$

équations dans lesquelles on a

$$\Phi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\Psi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2;$$

en effectuant les calculs, on a

$$\sqrt{1 - \sin^2\psi}\, d\varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\, d\psi,$$

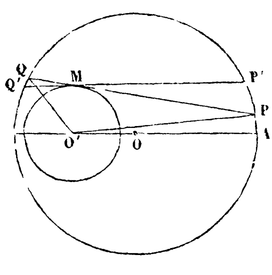
ou bien

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} \pm \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on conclut l'équation des lignes de courbure sous forme finie. Il est assez curieux que l'on puisse ramener ainsi aux fonctions elliptiques la solution d'un problème résolu par une tout autre voie.

THÉORÈME DE PONCELET.

Voici encore une interprétation très-curieuse du théorème qui vient de nous occuper : considérons deux cercles intérieurs l'un à l'autre; soient R et r leurs



rayons et PQ, P'Q' deux tangentes infiniment voisines menées au cercle de rayon r; soit OO' la ligne des centres

$$\text{arc AP} = 2\varphi R, \quad \text{arc AQ} = 2\psi R.$$

On aura

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{d\varphi}{d\psi};$$

mais les triangles semblables PP'M, QQ'M donnent

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{MP}{MQ'} = \frac{MP}{MQ};$$

ainsi

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{MP}{MQ};$$

or, à la limite, le point M vient sur le cercle r au point de contact de PQ, et l'on a

$$\overline{MP}^2 = \overline{O'P}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\varphi,$$

$$\overline{MQ}^2 = \overline{O'Q}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\psi:$$

on a donc

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sqrt{\frac{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\varphi}{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\varphi}{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\psi}}.$$

Si l'on fait

$$k^2 = \frac{2aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

on a l'équation connue

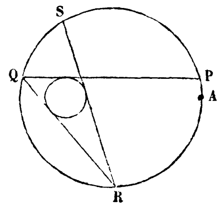
$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on peut conclure une construction géométrique de son intégrale. Mais on peut en déduire un résultat nouveau.

L'équation précédente devient, en intégrant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k\sin^2\varphi}} + \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \\ = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} \end{aligned} \right.$$

et μ est la valeur de ψ pour $\varphi = 0$. On voit que μ ne dépend ni de φ ni de ψ; si donc, à partir du point φ, on mène une seconde tangente QR au cercle intérieur, et



si l'on pose $AR = 2\chi$, on aura encore, en posant

$$1 - k^2\sin^2\varphi = \Phi, \quad 1 - k^2\sin^2\psi = \Psi, \quad \ldots, \quad 1 - k^2\sin^2\mu = M,$$

$$(3) \qquad -\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}} + \int_0^\chi \frac{d\chi}{\sqrt{X}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M}};$$

en menant par R une nouvelle tangente RS, on aurait entre l'arc $2\theta = AS$ et l'arc 2χ une relation analogue: les intégrales $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}$, $\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}}$, ... forment donc une progression arithmétique dont la raison est $\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$.

Supposons que le polygone PQRST soit fermé et que le point T coïncide avec A, le dernier des arcs φ, ψ, χ, ... sera de la forme $\varphi + 2n\pi$. En ajoutant alors les formules, telles que (2) et (3), on a

$$-\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} + \int_0^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = m \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$$

ou bien

$$\int_\varphi^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = m \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}};$$

donc le premier membre de cette formule ne dépend pas de φ; donc :

S'il existe un polygone de m côtés inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, il existera une infinité de polygones de m côtés jouissant de la même propriété.

Ce théorème est évidemment projectif et s'applique aux coniques : il a été découvert par Poncelet; la démonstration précédente est de Jacobi.

ADDITION DES ARCS D'ELLIPSE. — THÉORÈME DE FAGNANO.

Nous avons posé

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 x\, dx.$$

Nous aurons alors

$$\int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 (x+y)\, dx = \int_0^{x+y} k^2 \mathrm{sn}^2 (x+y)\, dx - \int_0^y k^2 \mathrm{sn}^2 y\, dy$$

ou

$$\int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 (x+y)\, dx = Z(x+y) - Z(y),$$

$$\int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 (x-y)\, dx = Z(x-y) + Z(y).$$

Retranchons ces formules l'une de l'autre, en ayant égard aux relations

$$\mathrm{sn}(x+y) + \mathrm{sn}(x-y) = \frac{2\,\mathrm{sn}\,x\ \mathrm{cn}\,y\ \mathrm{dn}\,y}{1 - k^2\ \mathrm{sn}^2 x\ \mathrm{sn}^2 y},$$

$$\mathrm{sn}(x-y) + \mathrm{sn}(x-y) = \frac{2\,\mathrm{sn}\,y\ \mathrm{cn}\,x\ \mathrm{dn}\,x}{1 - k^2\ \mathrm{sn}^2 x\ \mathrm{sn}^2 y};$$

nous aurons

$$\int_0^x 4\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y)^2}\,dx$$

$$= \mathrm{Z}(x+y) - 2\mathrm{Z}(y) - \mathrm{Z}(x-y).$$

Le premier membre est une dérivée exacte, si l'on observe que $2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ est le dérivé de $\operatorname{sn}^2 x$, et l'on a

$$\frac{2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y} = \mathrm{Z}(x+y) - 2\mathrm{Z}(y) - \mathrm{Z}(x-y).$$

Si l'on pose alors

$$\varphi = \operatorname{am} x,\quad \psi = \operatorname{am} y,\quad \mu = \operatorname{am}(x+y),\quad \nu = \operatorname{am}(x-y),$$

et si l'on observe que $\mathrm{Z}u$ devient $\mathrm{J}(\operatorname{am} u)$, et que

$$\mathrm{Z}(x) = \mathrm{J}(\varphi) = \mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi), \ \ldots,$$

la formule précédente devient

$$\frac{2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi}$$
$$= \mathrm{F}(\mu) - 2\mathrm{F}(\psi) - \mathrm{F}(\nu) - \mathrm{E}(\mu) + 2\mathrm{E}(\psi) + \mathrm{E}(\nu);$$

et comme $\mathrm{F}(\mu) = \mathrm{F}(\varphi) + \mathrm{F}(\psi)$,

$$\frac{2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} = -\mathrm{E}(\mu) + \mathrm{E}(\nu) + 2\mathrm{E}(\psi),$$

si l'on échange φ et ψ, μ ne change pas, ν se change en $-\nu$ et le second devient $-\mathrm{E}(\mu) - \mathrm{E}(\nu) + 2\mathrm{E}(\varphi)$.

En ajoutant alors à cette formule celle que l'on obtient en changeant φ en ψ, et *vice versâ*, on trouve [eu égard à la formule qui fait connaître $\operatorname{sn}(x+y)$]

$$\mathrm{E}(\varphi) + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\mu) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu.$$

On obtient le théorème de Fagnano en posant $\mu = \frac{\pi}{2}$.

alors $E(\mu)$ est le quart d'ellipse; nous le désignerons par E et nous aurons

$$(1)\qquad F(\varphi) + E(\psi) - E = k^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

Entre les angles φ, ψ, μ, on a la relation

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu}.$$

Si alors on fait $\mu = \frac{\pi}{2}$, on a

$$o = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2}$$

ou

$$(2)\quad \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \quad \text{ou} \quad b \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1.$$

La formule (1) montre que, si les arcs d'ellipse $E(\varphi)$ et $E - E(\psi)$ sont tels qu'ils correspondent à des anomalies φ, ψ satisfaisant à la formule (2), leur différence est rectifiable. Les équations de l'ellipse sont

$$x = \sin\varphi, \quad y = \sqrt{1 - k^2} \cos\varphi = b \cos\varphi.$$

Si l'on cherche la distance l du point φ de l'ellipse à la perpendiculaire menée de l'origine sur la tangente, on trouve

$$l = \frac{k^2 \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{(b^2 \operatorname{tang}^2 + 1)(1 + \operatorname{tang}^2\varphi)}}.$$

En chassant les dénominateurs, on trouve une équation du quatrième degré en tang φ, à savoir

$$b^2 \operatorname{tang}^4\varphi + \operatorname{tang}^2\varphi \left(1 + b^2 - \frac{k^4}{l^2}\right) + 1 = o.$$

Soient φ et ψ les deux solutions de cette équation, on en déduit

$$b \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1.$$

L'identité de cette formule avec (2) montre de quelle façon doivent être construits les angles φ et ψ. On voit que les arcs $E(\varphi)$ et $E - E(\psi)$ auront une différence rectifiable, s'ils sont choisis de telle sorte que les normales menées par leurs extrémités soient à des distances égales du centre de l'ellipse.