A. Tourrettes

# Questions proposées au concours général de 1876

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 18 (1879), p. 102-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__102_0>

# QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876.

## MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. TOURRETTES.

*Etant donné un parallélépipède, on considère trois arêtes qui n'ont pas d'extrémités communes et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes :*

1° *Trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré, passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes;*

2° *Chercher les droites réelles situées sur la surface;*

3° *Étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'une des faces du parallélépipède*

Soient AB, CD, EF les trois droites; achevons le parallélépipède et prenons pour axes de coordonnées trois lignes $Ox$, $Oy$, $Oz$ menées par le centre de la figure parallèlement à EF, CD, AB.

D'après cela, les équations des trois arêtes seront

$$\text{AB}\begin{cases} x = a, \\ y = b, \end{cases} \quad \text{CD}\begin{cases} x = -a, \\ z = c, \end{cases} \quad \text{EF}\begin{cases} z = -c, \\ y = -b. \end{cases}$$

Les coordonnées du sommet G sont

$$a, \; -b, \; -c,$$

celles du sommet H,

$$-a, \; b, \; c.$$

Cela posé, la droite GH a pour équations

$$cy + bz = 0,$$

$$cx - az = 0,$$

et l'équation des plans passant par cette droite sera

$$(1)\qquad cy + bz + \lambda(cx - az) = 0.$$

Cherchons les coordonnées des points d'intersection K, L, M de ce plan avec les trois arêtes.

Pour AB,

$$x = a,\quad y = b,\quad z = c\,\frac{a\lambda + b}{a\lambda - b},\quad \text{K.}$$

Pour CD,

$$x = -a,\quad y = -b + 2a\lambda,\quad z = c,\quad \text{L.}$$

Pour EF,

$$x = \frac{2b - a\lambda}{\lambda},\quad y = -b,\quad z = -c,\quad \text{M.}$$

Maintenant, projetons les cinq points G, H, K, L, M sur le plan $xOy$. En désignant par des lettres accentuées les projections, j'aurai

$$\begin{aligned}
&\text{G}'(x = a,\ y = -b),\quad \text{H}'(x = -a,\ y = b),\\
&\text{K}'(x = a,\ y = \phantom{-}b),\quad \text{L}'(x = -a,\ y = 2a\lambda - b),\\
&\text{M}'\left(y = -b,\quad x = \frac{2b - a\lambda}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Si l'on cherche l'équation de la conique passant par les cinq points, on trouve sans peine

$$(2)\qquad (x^2 - a^2)\lambda^2 + (x - a)(y - b)\lambda + y^2 - b^2;$$

cette équation et celle du plan représentent la conique de l'espace. On obtiendra donc le lieu demandé en éliminant $\lambda$ entre les deux équations, ce qui conduit à

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(x^2 - a^2)(cy + bz)^2 + (y^2 - b^2)(az - cx)^2\\
&\quad + (x - a)(y - b)(cy + bz)(az - cx) = 0.
\end{aligned}\right.$$

C'est une surface du quatrième degré.

Cherchons les génératrices rectilignes situées sur surface. La méthode générale conduit à une équation c quatrième degré à coefficients compliqués. Ces coefl cients, égalés à zéro, donnent cinq équations pour d terminer les paramètres des génératrices

$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q.$$

Il y aura une équation de condition à laquelle les v leurs de $\alpha$, $\beta$, $p$, $q$ devront satisfaire. Ce calcul éta impraticable, je considère l'équation (3) de la surfa et je vois que la diagonale $cy + bz = 0$, $az - cx =$ est sur la surface, ce qui est évident. Nous devons aus trouver les trois arêtes.

En effet, faisons $z = c$, il vient

$$(x^2 - a^2)(y + b)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x = a, \\ z = c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = c, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b, \\ z = c. \end{cases}$$

Nous avons la droite cherchée CD, la droite AG et l droite DG qui est double.

Faisons $z = -c$, il vient

$$(y^2 - b^2)(x + a)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y = b, \\ z = -c, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b, \\ z = -c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = -c, \end{cases}$$

ou bien les droites HB, EF, HE ; la dernière est double

Pour $x = a$, on trouve

$$(y^2 - b^2)(z - c)^2 = 0;$$

d'où

$$\begin{cases} x = a, \\ y = b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ y = -b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ z = c, \end{cases}$$

ou bien les droites AB, FG, AG; la dernière est double.

Pour $y = b$, on trouve

$$(x^2 - a^2)(z + c)^2 = 0;$$

d'où

$$\begin{cases} y = b, \\ x = a, \end{cases} \quad \begin{cases} y = b, \\ x = -a, \end{cases} \quad \begin{cases} y = b, \\ z = -c, \end{cases}$$

ou bien les droites AB, CH, HB; la dernière est double.

Pour $x = -a$, on trouve

$$(y^2 - b^2)(z + c)^2 - 2(y - b)(cy + bz)(z + c) = 0$$

ou bien

$$(y - b)(z + c)[(y + b)(z + c) - 2(cy + bz)] = 0.$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} x = -a, \\ z = -c, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ y = b, \end{cases}$$

ou bien les droites EH, CH, et la conique

$$x = -a, \quad (y + b)(z + c) - 2(cy + bz) = 0.$$

Enfin, pour $y = -b$, on trouve

$$(x - a)(z - c)[(x + a)(z - c) - 2(az - cx)] = 0,$$

ce qui donne les droites

$$\begin{cases} y = -b, \\ x = a, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -b, \\ z = c, \end{cases}$$

ou les droites GF, EF et la conique

$$y = -b, \quad (x+a)(z-c) - 2(az - cx) = 0.$$

En résumé, on trouve que les arêtes DE, BF, CA opposées à celles que l'on a choisies ne sont pas sur la surface; en tout, on obtient donc dix droites distinctes, mais cela ne démontre pas qu'il n'y en ait pas d'autres. Quoi qu'il en soit, si l'on savait résoudre les équations en $\alpha$, $\beta$, $p$, $q$, on tomberait sur une équation du seizième degré en $\alpha$. On aurait donc au plus seize droites, en admettant que toutes les valeurs trouvées satisfissent à l'équation de condition.

Pour étudier les sections par un plan parallèle à l'une des faces du parallélépipède, je fais $z = h$ dans l'équation, $h$ étant un paramètre variable. En développant et ordonnant, on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{r|r|r|r|l} c^2x^2y^2 + cbh & x^2y + c^2a & xy^2 + b^2h^2 & x^2 - a^2c^2 & y^2 \\ + bc^2 & - cah & - b^2c^2 & + a^2h^2 & \\ & & + cb^2h & - a^2ch & \\ \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{r|r|r|l} + abh^2 & xy - a^2bch & y + cb^2ah & x - a^2b^2h^2 \\ - abc^2 & - a^2bh^2 & - ab^2h^2 & \\ \end{array}\right\} = 0.$$

Ordonnant par rapport à $y$, il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &[(c^2x^2 + ac(c-h)x - a^2(c^2 - h^2 + ch)]y^2 \\ &\quad + [bc(h+c)x^2 + ab(h^2 - c^2)x - a^2bh(c+h)]y \\ &\quad + b^2(h^2 - c^2 + ch)x^2 + ab^2h(c-h)x - a^2b^2h^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

La courbe représentée par (5) aura des points à l'infini si les racines de

$$c^2x^2 + ac(c-h)x - a^2(c^2 - h^2 + ch) = 0$$

sont réelles; on aura deux asymptotes parallèles à l'axe des $y$. La condition de réalité exige que

$$3h^2 - 2ch - 5c^2 < 0,$$

ou que $h$ soit compris entre $\frac{5}{3}c$ et $-c$.

De même, en ordonnant par rapport à $x$, on trouve que le coefficient de $x^2$ est

$$c^2y^2 + cb(c+h)y + b^2(h^2 - c^2 + ch);$$

ce coefficient, égalé à zéro, aura des racines réelles, si

$$3h^2 + 2ch - 5c^2 < 0,$$

ce qui exige que $h$ soit entre $-\frac{5}{3}c$ et $c$.

En rangeant ces valeurs limites par ordre de grandeur, on a

$$-\frac{5}{3}c,\quad -c,\quad c,\quad \frac{5}{3}c.$$

La section aura deux asymptotes, si $h$ est entre $-\frac{5}{3}c$ et $-c$, ou entre $c$ et $\frac{5}{3}c$; elle en aura quatre s'il est entre $-c$ et $+c$. En dehors de ces limites, il n'y aura pas d'asymptotes, et, par suite, pas de points à l'infini; la section sera une courbe fermée. D'ailleurs, il n'y a pas d'asymptotes non parallèles aux axes.

Si l'on fait $h = 0$, on trouve

$$(x^2 + ax - a^2)y^2 + (bx^2 - abx)y - b^2x^2 = 0.$$

On peut construire entièrement la courbe représentée par cette équation. On a quatre asymptotes, deux parallèles à $Oy$ et deux à $Ox$. L'origine est un point isolé. Il n'y a pas de points de la courbe entre $x = \frac{3}{5}a$ et $x = -a$.

D'après cela, on construit facilement la courbe, qui a quatre branches infinies.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Barbarin et Brunot.

---

## MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (*);

PAR M. B. ROBAGLIA.

---

*On donne une circonférence, une droite fixe* LL′ *qui rencontre la circonférence, et deux points fixes* A et A′ *sur la circonférence; on joint un point quelconque* M *de la courbe aux deux points* A *et* A′, *les droites* MA, M′A′ *rencontrent la ligne fixe* LL′ *en deux points variables* P *et* P′ : *démontrer qu'il existe sur la droite* LL′ *deux points fixes* I *et* I′ *tels que le produit* IP $\times$ I′P′ *demeure constant lorsque le point* M *se meut sur la circonférence; déterminer la position des deux points* I *et* I′.

Menons, par le point A, jusqu'en sa rencontre N′ avec la circonférence, la droite AN′ parallèle à la droite fixe LL′; menons de la même manière la droite A′N et tirons les droites AN et A′N′ qui coupent la droite LL′ en deux points fixes I et I′.

Les points I et I′ ainsi déterminés sont les deux points cherchés.

En effet, les deux triangles AIP et A′I′P′ sont semblables, car d'une part

$$\widehat{API} = \widehat{MAN'} = \widehat{MA'N'} = \widehat{I'A'P'},$$

d'autre part

$$\widehat{AIP} = \widehat{A'I'P'}.$$

---

(*) Question déjà résolue t. XV, p. 374.

On a donc

$$\frac{IP}{A'I'} = \frac{AI}{I'P'};$$

d'où

$$IP \times I'P' = AI \times A'I',$$

quantité constante.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Ch. Brunot.

## PHILOSOPHIE;

PAR M. LEZ.

*Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale* AA', *puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet* A :

1° *On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d;*

2° *On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.*

Faisons passer un plan par les diagonales CA, C'A' de deux faces opposées du cube; il contiendra la diagonale AA' et il sera coupé par le plan sécant suivant une perpendiculaire à AA'.

Considérons les points M, M', N où cette perpendiculaire rencontre les diagonales A'C', AC, AA'; nous aurons, à cause des triangles semblables AMN, A'M'N et AA'C,

$$AM : AA' :: AN : AC,$$
$$A'M' : AA' :: A'N : AC;$$

d'où

$$AM = d\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad A'M' = \frac{3a - d\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad M'C' = \frac{d\sqrt{3} - a}{\sqrt{2}}.$$

Examinons les variations de AM et de M′C′. Quand $M'C' = 0$, $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$, la section est un triangle équilatéral ayant $a\sqrt{2}$ pour côté et $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ pour surface. Entre $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $d + \frac{2a}{\sqrt{3}}$, la section est un hexagone, puisque le plan sécant rencontre six arêtes; au delà de ces limites, la section est un triangle.

La surface S de cette section est égale à la projection P divisée par le cosinus (*) du plan sécant ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or cette projection est, en général, la différence entre le carré $a^2$ et deux triangles rectangles isoscèles $\overline{CM}^2 + \overline{C'M'}^2$, soit

$$P = a^2 - \left(\frac{2a - d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{d\sqrt{3} - a}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \frac{3}{2}\left(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2\right);$$

par suite

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2\right).$$

Pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, la surface de l'hexagone régulier d'un côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$ est $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; c'est le maximum des sections variables.

---

(*) La Trigonométrie est en dehors du programme de la classe de Philosophie, mais on voit immédiatement ici comment on suppléerait au cosinus par la considération des figures semblables.

## RHÉTORIQUE ;

PAR M. LEZ.

---

*Étant donnée une sphère, on construit, sur un grand cercle de cette sphère, comme base, un cône équivalent à la moitié du volume de la sphère, et l'on demande :*

1° *De trouver le rayon du petit cercle suivant lequel la surface de ce cône coupe la surface de la sphère ;*

2° *D'évaluer le volume de la portion de cône comprise entre sa base et le plan de ce petit cercle.*

Le cône ayant pour base un cercle de rayon R aura une hauteur $h = 2R$ pour que son volume soit $\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$.

Or, en désignant par A le sommet du cône, par AB son apothème, par N le point de rencontre de AB avec la sphère, par NM le rayon du petit cercle d'intersection, par AC la tangente à la sphère, on a

$$AC = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = R\sqrt{3},$$

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = R\sqrt{5}, \quad NA.AB = \overline{AC}^2;$$

d'où

$$AN = \frac{3R}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad BN = \frac{2R}{\sqrt{5}}.$$

Mais

$$OM = \frac{AO.BN}{BA} = \frac{4R}{5} = d \quad \text{et} \quad MN = \frac{OB.AN}{BA} = \frac{3R}{5}.$$

Le volume du tronc de cône est donc

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{4R}{5}\left(R^2 + \frac{9R^2}{25} + \frac{3R^2}{5}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{49}{125}.$$

---

## SECONDE;

PAR M. LEZ.

---

1° *Construire un triangle* ABC, *connaissant les longueurs des deux côtés* AB *et* AC *et celle de la bissectrice* AD *de l'angle* A.

Représentons les côtés AC, AB par $b$ et $c$, la bissectrice par $p$ et les segments additifs BD et DC par $x$, $y$; nous pourrons écrire

$$xy = cb - p^2 = q^2 \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

Nous avons donc à chercher un rectangle équivalent à un carré $q^2$ et dont les côtés soient proportionnels à $c$ et à $b$; c'est une construction très-simple qui fera connaître le troisième côté BC. Inutile de la reproduire, elle se trouve dans tous les Traités élémentaires.

*Note.* — Autre solution par M. Droz.

2° *On mène les diagonales d'un triangle* ABCD, *lesquelles se coupent en un point* O. *Étant données les aires $p^2$ et $q^2$ des deux triangles* AOB, COD, *trouver l'expression de l'aire des deux autres triangles* AOC, BOD *et celle de l'aire du trapèze* T.

Représentons les bases AB, DC du trapèze par $a$ et $b$, les hauteurs des triangles AOB, DOC par $h'$ et $h$, nous aurons

$$\text{triangle BOD} = \text{S} = \text{DBC} - \text{DOC} = \frac{bh'}{2}$$

et

$$\text{triangle AOC} = \text{S}' = \text{ACB} - \text{AOB} = \frac{ah}{2}.$$

De même

$$\text{AOB} = p^2 = \frac{ah'}{2} \quad \text{et} \quad \text{DOC} = q^2 = \frac{bh}{2};$$

par suite

$$\frac{2\text{S}}{b} = h' = \frac{2p^2}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{S}}{p^2} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{2\text{S}'}{a} = h = \frac{2q^2}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{S}'}{q^2} = \frac{a}{b}.$$

Mais ces triangles BOD et AOC sont équivalents; donc

$$2\text{S} = bh' = ah \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{h'}{h}.$$

De plus

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{ah'}{bh} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b};$$

alors

$$\text{S} = \frac{p^2 b}{a} pq \quad \text{et} \quad \text{T} = (p+q)^2.$$

*Note.* — Autre solution par M. Robaglia.

---

## TROISIÈME;

PAR M. LEZ.

---

*Construire un triangle* ABC, *connaissant la base* AB, *donnée de position, l'angle au sommet* C *et un point* P *pris sur la bissectrice de l'angle formé en* C *par le côté* AC *et le prolongement du côté* BC.

Sur le côté AB décrivons un segment capable de l'angle C, joignons le point P au milieu M de l'arc AB. Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle C se coupant à angle droit, il suffit de décrire un cercle sur PM comme diamètre, il rencontrera le segment au sommet cherché C.

## ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL;

Par M. ROBAGLIA.

*Étant donnés deux rectangles égaux superposés* ABCD, A′B′C′D′:

1° *Déterminer géométriquement un point* O *tel, que si, laissant fixe le rectangle* ABCD, *on fait tourner autour de ce point le rectangle* A′B′C′D′ *jusqu'à ce que le grand côté* A′B′, *qui coïncidait primitivement avec* AB, *vienne se placer perpendiculairement à* AB, *le milieu de* A′B′ *se trouve au point de concours des diagonales du rectangle* ABCD.

2° *Calculer, en supposant les longueurs des côtés* AB *et* AD *égales à* $2a$ *et à* $2b$, *les distances du point* O *aux deux côtés* AB *et* AD.

1° Joignons respectivement les points A′ et B′, extrémités de la droite A′B′ dans sa seconde position, aux points A et B. Sur les droites AA′ et BB′, en leurs milieux, élevons des perpendiculaires : le point O où ces deux perpendiculaires se coupent est le point cherché.

Remarquons, en effet, que AB égale A′B′; AO égale A′O comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire et de même OB égale OB′; que par suite les angles AOB et A′OB′ sont égaux. En retranchant de ces deux angles la partie commune A′OB, on en conclut que les angles AOA′ et BOB′ sont égaux.

Si maintenant nous faisons tourner le rectangle A′B′C′D′ autour du point O, de l'angle BOB′, le rayon OB viendra sur OB′ et le point B au point B′; de même le rayon OA, tournant de l'angle AOA′ = BOB′, viendra sur OA′ et le point A au point A′. Ainsi, le rectangle

A'B'C'D', après avoir tourné autour du point O, déterminé comme nous l'avons dit, de l'angle BOB', prendra la position marquée dans l'énoncé du problème.

2° Soient OE et OE' les perpendiculaires abaissées du point O sur AB et AD, H le point où la perpendiculaire OE' rencontre A'B', M et N les milieux des droites AB et A'B'.

De l'égalité des deux triangles BOA et B'O'A', on conclut que

$$OE = OH, \quad OE' = a - OE, \quad OM = ON.$$

Le triangle MON étant isoscèle et OH étant égal à OE, on en conclut que

$$OE = \frac{b}{2}, \quad OE' = a - \frac{b}{2}.$$

Les distances du point O aux deux autres côtés du rectangle ABCD sont

$$\frac{3b}{2} \quad \text{et} \quad a + \frac{b}{2}.$$