Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 83-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__83_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1228

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 192);

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Sur une normale menée par un ombilic O *à une surface du second degré, il existe un point* P *tel, qu'en menant par ce point une transversale rectiligne, rencontrant la surface en des points* M, M', *l'angle* MOM' *est constamment droit, quelle que soit la direction donnée à la transversale. Et le plan polaire du point* P, *par rapport à la surface considérée, est parallèle à un plan cyclique de cette surface.*

La méthode que je vais suivre montre que les ombilics d'une surface du second ordre jouissent de la propriété énoncée, à l'exclusion de tous les autres points de la surface.

Soit une surface du second ordre; prenons pour origine un point de la surface, pour axe des z la normale en ce point, et pour axes des x et des y deux droites parallèles aux axes de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent à l'origine.

L'équation de la surface est alors de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2lz = 0.$$

Faisons tourner les axes des x et des y d'un angle φ autour de l'axe des z. L'équation de la surface dans ce nouveau système d'axes sera

$$\begin{aligned}A(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 + A'(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 + A''z^2 \\ + 2B(x\sin\varphi + y\cos\varphi)z + 2B'(x\cos\varphi - y\sin\varphi)z + 2lz = 0.\end{aligned}$$

Si, dans cette équation, on fait $x = 0$, on obtient une équation qui représente la section faite dans la surface par le nouveau plan des yz. Cette équation est

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 + A''z^2 \\ &\quad + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi)yz + 2lz = 0.\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant une droite située dans le plan des yz, et dont l'équation sera

$$my + nz = 1.$$

L'équation

$$\begin{aligned}(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 \\ + A''z^2 + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi)yz + 2lz(my + nz) = 0\end{aligned}$$

représentera, dans le plan des yz, les deux droites qui joignent l'origine aux points où cette droite coupe la conique représentée par l'équation (1).

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 \\ + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi + Cm)yz + (A'' + 2ln)z^2 = 0.\end{aligned}$$

Pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit qu'on ait

$$A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi + A'' + 2ln = 0,$$

d'où

$$n = -\frac{A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi + A''}{2l}.$$

Portant cette valeur de n dans l'équation

$$my + nz = 1,$$

il vient

$$my - \frac{A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi + A''}{2l}z = 1.$$

La droite représentée par cette équation coupe l'axe des z en un point dont la distance à l'origine est

$$z = -\frac{2l}{A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi + A''}.$$

Pour que cette distance soit indépendante de φ, il faut et il suffit que $A = A'$, c'est-à-dire que l'origine soit un ombilic de la surface.

Si la condition $A = A'$ est satisfaite, les coordonnées du point P sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{2l}{A + A''}.$$

Le plan polaire de ce point a pour équation

$$-2(A''z + By + B'x + C) + (A + A'')z = 0.$$

Le plan mené par l'origine parallèlement à celui-ci a pour équation

$$(1) \qquad A''z + 2By + 2B'x = Az.$$

D'ailleurs l'équation de la surface peut s'écrire

$$A(x^2+y^2) + z(A''z + 2By + 2B'x) + 2lz = 0;$$

par conséquent les coordonnées d'un point quelconque de l'intersection de la surface avec le plan représenté par l'équation (1) satisfont à l'équation

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2lz = 0,$$

qui est celle d'une sphère, ce qui démontre la propriété énoncée.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; E. Paturet; A. Morel; B. Launoy; A. Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; H. Picat, élève du lycée de Grenoble; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon.

Question 1231

(voir 2e série, t. XVI, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

D'un point M *on mène trois normales à une conique; soit* P *le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois pieds de ces normales; démontrer que la droite* OP *et la quatrième normale que l'on peut mener du point* M *à la courbe sont également inclinées sur les axes.*

Si la conique est une hyperbole équilatère, la droite OP *passe par le pied de la quatrième normale.*

(LAGUERRE.)

Soient A, B, C les pieds des trois premières normales et D le pied de la quatrième. Je prends les axes de la conique pour axes des coordonnées, et je suppose, pour fixer les idées, que la conique est une ellipse : pour l'hyperbole, il suffira de changer dans le résultat b^2 en $-b^2$.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point M et

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation de la conique. Les pieds des quatre normales sont les intersections de cette conique avec l'hyperbole

$$(2)\qquad c^2xy - a^2x_1y + b^2y_1x = 0.$$

Le cercle circonscrit au triangle ABC a une équation de la forme

$$(3)\qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + S = 0,$$

en posant $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = S$.

De l'équation (2) on tire

$$y = \frac{b^2y_1x}{a^2x_1 - c^2x}.$$

En reportant cette valeur dans les équations (1) et (3), on obtient les équations

$$(4)\quad \left\{ c^4x^4 - 2a^2c^2x_1x^3 + \begin{array}{l|} a^4x_1^2 \\ + a^2b^2y_1^2 \\ - a^2c^4 \end{array}\; x^2 + 2a^4c^2x_1x - a^6x_1^2 = 0, \right.$$

$$(5)\quad \left\{ c^4x^4 - \begin{array}{l|} 2a^2c^2x_1 \\ - 2c^4\alpha \end{array}\; x^3 + \begin{array}{l|} 4a^2c^2x_1\alpha \\ + 2b^2c^2y_1\beta \\ + c^4S \\ + a^4x_1^2 \\ + b^4y_1^2 \end{array}\; x^2 - \begin{array}{l|} 2a^4x_1^2\alpha \\ - 2a^2b^2x_1y_1\beta \\ - 2a^2c^2x_1S \end{array}\; x + a^4x_1^2S = 0, \right.$$

qui déterminent, la première les abscisses des points A, B, C, D, et la seconde celles des points A, B, C, P' [P' étant le point de l'hyperbole (2) diamétralement opposé au point P].

Ces deux équations ayant trois racines communes, leurs premiers membres admettent un diviseur commun du troisième degré

$$(d)\quad \left\{ 2c^4\alpha x^3 - \begin{array}{l|} 4a^2c^2x_1\alpha \\ - 2b^2c^2y_1\beta \\ - c^4T \\ + b^2c^2y_1^2 \end{array}\; x^2 + \begin{array}{l|} 2a^4x_1^2\alpha \\ + 2a^2b^2x_1y_1\beta \\ + 2a^2c^2x_1T \end{array}\; x - a^4x_1^2T, \right.$$

où $T = S + a^2$, que l'on obtient en les retranchant l'un de l'autre.

En exprimant que le reste de la division est nul, quel que soit x, on a les trois équations

$$(6)\quad 4a^2b^2y_1\alpha(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1) - 4a^2c^4\alpha^2 + V^2 = 0,$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &4a^2c^4\alpha^2 - 2a^2b^2x_1y_1\alpha\beta \\ &\quad + a^2b^2x_1y_1^2\alpha - b^2y_1\beta V - c^2TV = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad 4a^2c^4\alpha^2 - c^2TV = 0,$$

en posant, pour abréger, $c^2T + 2b^2y_1\beta - b^2y_1^2 = V$.

En ayant égard à l'équation (8), l'équation (7) se réduit à

$$a^2x_1\alpha(y_1 - 2\beta) - \beta V = 0,$$

d'où

$$V = \frac{a^2x_1\alpha(y_1 - 2\beta)}{\beta} \quad \text{et} \quad T = \frac{(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)}{c^2\beta},$$

$$TV = \frac{a^2x_1\alpha(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)^2}{c^2\beta^2} = 4a^2c^2\alpha^2,$$

et, par suite,

$$(9)\qquad 4c^4\alpha\beta^2 = x_1(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)^2.$$

En remplaçant V par sa valeur dans l'équation (6), on a

$$4a^2b^2y_1\alpha(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1) - 4a^2c^4\alpha^2 + \frac{a^4x_1^2\alpha^2(y_1 - 2\beta)^2}{\beta^2} = 0,$$

et, en ayant égard à l'équation (9),

$$4b^2y_1(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1)\beta^2 - b^2x_1y_1\beta(y_1 - 2\beta)^2 = 0,$$
$$4(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1)\beta - x_1(y_1^2 - 4y_1\beta + 4\beta^2) = 0,$$

$$(10)\qquad 4\alpha\beta - x_1y_1 = 0.$$

On voit que les centres des quatre cercles circonscrits au triangle ayant pour sommets les pieds des normales pris trois à trois, sont situés sur une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de la conique et passant par le milieu de OM.

Au moyen de l'équation (10), l'équation (9) peut être remplacée par

$$(9') \quad 4a^2\alpha(\alpha - x_1) + 4b^2(\beta - y_1) + a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4 = 0,$$

qui représente une conique de même espèce que la proposée, passant par les centres des quatre cercles.

En égalant à zéro le quotient de la division du polynôme (4) par le diviseur (d), on a l'abscisse du point D,

$$x = \frac{-V}{2c^2\alpha} = \frac{a^2x_1(2\beta - y_1)}{2c^2\beta},$$

puis

$$y = \frac{b^2y_1x}{a^2x_1 - c^2x} = \frac{b^2(2\beta - y_1)}{c^2},$$

et, par suite,

$$y - y_1 = \frac{2b^2\beta - a^2y_1}{c^2}, \quad x - x_1 = \frac{x_1(2b^2\beta - a^2y_1)}{2c^2\beta},$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2\beta}{x_1},$$

coefficient angulaire de la quatrième normale MD.

De même, en égalant à zéro le quotient de la division du polynôme (5) par le diviseur (d), on a l'abscisse du point P′ symétrique du point P par rapport au centre de l'hyperbole (2)

$$x' = 2\alpha - \frac{V}{2c^2\alpha} = 2\alpha + \frac{a^2x_1(2\beta - y_1)}{2c^2\beta}$$
$$= \frac{4c^2\alpha\beta + 2a^2x_1\beta - a^2x_1y_1}{2c^2\beta},$$

et, en vertu de l'équation (10),

$$x' = \frac{x_1(2a^2\beta - b^2 y_1)}{2c^2\beta}$$

$$y' = \frac{b^2 y_1 x}{a^2 x_1 - c^2 x} = \frac{2a^2\beta - b^2 y_1}{c^2},$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{2\beta}{x_1},$$

coefficient angulaire de OP'.

La droite OP' est donc parallèle à MD.

Les coordonnées du centre de l'hyperbole (2) étant $\frac{a^2 x_1}{c^2}$ et $-\frac{b^2 y_1}{c^2}$, celles du point P symétrique de P' par rapport à ce centre sont

$$x = \frac{2a^2 x_1}{c^2} - \frac{x_1(2a^2\beta - b^2 y_1)}{2c^2\beta} = \frac{x_1(2a^2\beta + b^2 y_1)}{2c^2\beta},$$

$$y = -\frac{2b^2 y_1}{c^2} - \frac{2a^2\beta - b^2 y_1}{c^2} = -\frac{(2a^2\beta + b^2 y_1)}{c^2}.$$

Le coefficient angulaire de OP est donc

$$\frac{y}{x} = \frac{2\beta}{x_1},$$

ce qui démontre le théorème.

Si la conique donnée est une hyperbole équilatère, $b^2 = a^2$, les coordonnées du point D

$$x = \frac{x_1(2\beta - y_1)}{4\beta}, \quad y = -\frac{2\beta - y_1}{2}$$

vérifient l'équation

$$\frac{y}{x} = \frac{-2\beta}{x_1}$$

de la droite OP.

Donc la droite OP passe par le pied de la quatrième normale. C. Q. F. D.

Question 1245

(voir 2[e] série, t. XVI, p. 335);

PAR M. BARTHE,
Élève du lycée de Bordeaux.

Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur du point de contact de la tangente parallèle à cette corde.

(P. SONDAT.)

Soient P le pôle de la corde focale AB, qui se trouve sur la directrice, I le milieu de cette corde, M le point de contact de la tangente parallèle à la corde; on a, d'après une propriété connue,

$$PM = MI,$$

puis

$$PM = MF,$$

d'où

$$PI = 2MF.$$

Mais le triangle rectangle PAB donne

$$PI = \frac{AB}{2};$$

donc

$$AB = 4MF.$$

Nota. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc; H. Lez; C. Cochery; B. Robaglia; F. Pisani, professeur à Naples; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; A. Droz, ingénieur; G. Carraud, élève du lycée de Châteauroux; R. Beaugey, élève du lycée de Grenoble; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; G. Lambiotte, élève de l'École des Mines de Liege; Numa Parra, J. Lapierre, L. Troupenat, J. Chambon, elèves du lycée de Bordeaux; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon; Ad. Protard, élève du lycée de Moulins; E. Dunoyer, élève du lycée de Marseille; A. Didier, élève du lycée de Grenoble; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; E. Ambert, maître répétiteur au lycée de Montpellier; S. K., à Vienne (Autriche).