NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GAMBEY

Solution de la question de mécanique élémentaire, proposée au concours d'agrégation en 1875

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 75-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__75_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1875 :

PAR M. GAMBEY.

Déterminer les positions d'équilibre de deux poids égaux p, mobiles sans frottement sur une circonférence *fixe, située dans un plan vertical, et sur une tige rectiligne pouvant librement tourner autour d'un point A, pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.*

On négligera les dimensions des poids mobiles.

Soient M et M' les positions des poids p; O le centre de la circonférence; OB le rayon sur lequel est pris le point A; posons enfin

$$\text{MAB} = \alpha, \quad \text{MOB} = \beta.$$

Les réactions dues à la résistance de la circonférence étant normales à cette courbe n'influent pas sur le mouvement des poids; on peut donc les négliger. Il suffira d'évaluer les composantes tangentielles des poids mobiles, et d'écrire que leurs moments, par rapport au point fixe, sont égaux; ce qui donne

$$\text{AM}\cos\beta = \text{AM}'\cos(2\alpha - \beta).$$

Les triangles OAM, OAM' donnent en outre

$$\frac{\text{AM}}{\sin\beta} = \frac{\text{OM}}{\sin\alpha} = \frac{\text{AM}'}{\sin(2\alpha - \beta)}.$$

On déduit aisément de ces relations

$$\sin 2\beta = \sin(4\alpha - 2\beta);$$

ce qui exige que l'on ait

$$4\alpha - 2\beta = 2\text{K}\pi + 2\beta,$$

d'où

(1) $$\alpha = \text{K}\frac{\pi}{2} + \beta;$$

ou bien

$$4\alpha - 2\beta = (2\text{K} + 1)\pi - 2\beta,$$

d'où

(2) $$\alpha = \text{K}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Mais l'angle $\widehat{OMA} = \alpha - \beta$ ne peut être droit; donc il faut se borner à la relation (2).

Si l'on y donne à K toutes les valeurs entières à partir de zéro, on obtiendra toutes les positions d'équilibre :

$$\text{pour } K = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4};$$
$$\text{pour } K = 1, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

Les valeurs suivantes de K reproduiraient les deux positions déjà obtenues.

Ainsi la tige doit être à 45 degrés sur le diamètre horizontal de la circonférence. Il est facile de distinguer la position d'équilibre stable par cette considération que le centre de gravité du système des deux poids doit être le plus bas possible.

Cette même considération donne immédiatement une solution géométrique de la question. Cela revient, en effet, à chercher le point le plus bas et le point le plus haut du lieu géométrique des milieux des cordes qui passent par le point A. Or on sait que ce lieu est une circonférence ayant pour diamètre OA. On retrouve ainsi les résultats précédents.

(*) La même question a été résolue par M. Duranton, chargé de cours au lycée du Puy.