Faure

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 69-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__69_1>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[FIN (*).]

Propriétés de quatre surfaces passant par les mêmes points.

168. Lorsque la droite ε' coïncide avec la droite ε, la relation $(2)'$ du n° 148 devient

$$o = I_\varepsilon - \varphi \sum \frac{|\varepsilon\nu|^2}{|\gamma\nu|^2} \frac{I_a I'_b + I_b I'_a}{\overline{ab}^2} + \varphi^2 I'_\varepsilon,$$

de sorte que, si φ_1 et φ_2 sont les paramètres des deux

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289, 508, 541.

surfaces du système qui touchent la droite ε,

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{l}{I'_\varepsilon}, \quad \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = \frac{l}{I_\varepsilon},$$

l étant le coefficient de $-\varphi$ dans l'équation écrite ci-dessus.

De la première de ces relations résulte ce théorème :

Quatre surfaces passant par les mêmes points, si l'on mène une tangente commune ε à deux d'entre elles, le rapport $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ des indices de cette droite par rapport aux deux autres S et S' est constant, quelle que soit cette tangente.

En remplaçant le rapport $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ par ses valeurs, on pourra donner à ce théorème des énoncés différents, analogues à ceux indiqués (164).

Interprétation géométrique du coefficient l.

169. Désignons par g et h les points de contact de la droite ε avec les deux surfaces du système, qui touchent cette droite,

$$\varphi_1 = \frac{I_g}{I'_g}, \quad \varphi_2 = \frac{I_h}{I'_h},$$

de sorte que

$$\frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h} = \frac{l}{I'_\varepsilon}, \quad \frac{I'_g}{I_g} + \frac{I'_h}{I_h} = \frac{l}{I_\varepsilon}.$$

Nous savons (154) que les points g et h sont conjugués à toutes les surfaces du système. Or il résulte du théorème (68, b) que, si l'on prend sur une droite fixe ε deux points g et h conjugués à S', la somme $\frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h}$ est constante, et que, si ces points sont conjugués à S, la somme $\frac{I'_g}{I_g} + \frac{I'_h}{I_h}$ est aussi constante quels que soient les points g et h. Il suit de là que, si ces sommes sont nulles, la droite ε coupera la surface S en deux points g et h conjugués à S' et la surface S' en deux points conjugués à S.

Ainsi *l'équation* $l = 0$ *représente le complexe des droites qui coupent les surfaces* S *et* S' *en quatre points harmoniques.*

Les droites du complexe sont donc caractérisées par cette propriété; si, sur l'une d'elles, on prend deux points g et h conjugués soit à S, soit à S', la somme des paramètres des surfaces du système, qui passent par ces points, est nulle; par conséquent, pour avoir des droites du complexe, il suffira de construire les deux surfaces du système

$$(\varphi)\quad \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_a + \varphi \mathrm{I}'_a} + \frac{(b, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_b + \varphi \mathrm{I}'_b} + \frac{(c, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_c + \varphi \mathrm{I}'_c} + \frac{(d, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_d + \varphi \mathrm{I}'_d} = 0,$$

$$(-\varphi)\quad \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_a - \varphi \mathrm{I}'_a} + \frac{(b, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_b - \varphi \mathrm{I}'_b} + \frac{(c, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_c - \varphi \mathrm{I}'_c} + \frac{(d, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_d - \varphi \mathrm{I}'_d} = 0,$$

et de mener à ces surfaces des tangentes communes; en donnant à φ toutes les valeurs possibles, on aura toutes les droites du complexe.

En éliminant φ entre ces deux équations, on trouve que les plans tangents aux surfaces (φ) et $(-\varphi)$ enveloppent la surface

$$m.m' = \mathrm{I}_\mathrm{E} \mathrm{I}'_\mathrm{E}.$$

Cette surface, qui joue un rôle important dans l'étude du complexe, peut se mettre sous ces deux formes

$$0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_a - \frac{m}{\mathrm{I}_\mathrm{E}} \mathrm{I}'_a}, \qquad 0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\frac{m'}{\mathrm{I}_\mathrm{E}} \mathrm{I}_a - \mathrm{I}'_a}.$$

Il est aisé de le vérifier, mais on y est conduit par la considération suivante. Soit F un plan qui touche les surfaces (φ) et $(-\varphi)$; il y a une troisième surface du système qui touche ce plan, et son paramètre φ' est déterminé par la relation

$$\varphi - \varphi + \varphi' = \frac{m}{\mathrm{I}'_{\mathrm{F}}},$$

en écrivant, dans m, F au lieu de E. Ainsi cette troisième surface a pour équation

$$0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_a - \dfrac{m'}{\mathrm{I}'_{\mathrm{F}}} \mathrm{I}'_a};$$

mais puisque, en faisant varier le plan F, on peut faire en sorte que cette surface touche tous les plans tangents communs aux surfaces (φ) et $(-\varphi)$, il est évident qu'en remplaçant le plan F par le plan variable E on obtiendra l'équation de la surface enveloppée par ces plans tangents, c'est-à-dire la première des équations écrites plus haut. La seconde s'obtient d'une manière analogue, en observant que

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{m'}{\mathrm{I}_{\mathrm{F}}},$$

en remplaçant dans m' le plan E par le plan F.

Si l'on désigne par e et f deux points quelconques pris sur la droite ε, on a

$$l.\overline{ef}^2 = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{A}) & (f, \mathrm{A}) \\ (e, \mathrm{B}) & (f, \mathrm{B}) \end{vmatrix}^2 \frac{\mathrm{I}_a \mathrm{I}'_b + \mathrm{I}_b \mathrm{I}'_a}{(a, \mathrm{A})^2 (b, \mathrm{B})^2}.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme très-simple (151)

$$l.\overline{ef}^2 = \mathrm{I}_e \mathrm{I}'_f + \mathrm{I}_f \mathrm{I}'_e - 2\mathrm{I}_{ef} \mathrm{I}'_{ef}.$$

Si le point f est un point fixe donné,

$$\mathrm{I}_e \mathrm{I}'_f - \mathrm{I}_f \mathrm{I}'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par la courbe SS' et par le point f; son paramètre φ est égal à $\frac{I_f}{I'_f}$; par conséquent,

$$I_e I'_f + I_f I'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par cette même courbe et dont le paramètre a pour valeur $-\frac{I_f}{I'_f}$ ou $-\varphi$. D'ailleurs les équations

$$I_{ef} = 0 \quad \text{ou} \quad I'_{ef} = 0$$

représentent respectivement les plans polaires du point f par rapport aux surfaces S et S'.

D'après cela, l'équation

$$l = 0 \quad \text{ou} \quad I_e I'_f + I_f I'_e - 2 I_{ef} I'_{ef} = 0$$

nous montre que, pour avoir les droites du complexe, qui passent par le point f, on construira la surface $-\varphi$ du système dont le paramètre est égal et de signe contraire à celui de la surface du système qui passe par le point f, on prendra ensuite les plans polaires du point f par rapport aux surfaces S et S', et l'on fera passer un cône par le point f, et l'intersection de la surface $-\varphi$ par l'un ou l'autre de ces plans polaires. Les arêtes de ce cône sont les droites du complexe qui passent par le point f.

170. Considérons trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, passant par l'intersection SS'. On peut, d'une infinité de manières, tracer des triangles conjugués à S, dont les sommets a, b, c soient situés respectivement sur les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. Prenons le pôle d du plan abc par rapport à S; nous formons ainsi un tétraèdre $abcd$ conjugué à S, et nous savons alors (68, b) que $\sum \frac{I'_a}{I_a} = \text{const.}$

Or, si φ_1, φ_2, φ_3 sont les paramètres des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, on a

$$I_a - \varphi_1 I'_a = 0, \quad I_b - \varphi_2 I'_b = 0, \quad I_c - \varphi_3 I'_c = 0,$$

de sorte que, les trois premiers rapports qui figurent dans l'expression écrite ci-dessus étant constants, le quatrième $\frac{I'_d}{I_d}$ est aussi constant, et par conséquent (158) le point d décrit une surface Φ_4 qui passe aussi par la courbe SS'. Nous connaissons huit points de la surface S_4; car, si nous menons un plan E qui touche les trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, les points de contact déterminent (154 un triangle conjugué à S; donc le pôle de ce plan E, par rapport à S, sera sur la surface Φ_4. De là ce théorème :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passant par les mêmes points, si les sommets* a, b, c *d'un triangle conjugué à* S *sont situés respectivement sur les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le pôle du plan abc pris par rapport à* S *décrira une surface* Φ_4, *qui passera par les points communs aux surfaces données et par les pôles* (*par rapport à* S) *des huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3.

D'où le suivant :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passant par les mêmes points, si les sommets* a, b, c *d'un triangle conjugué à* S *sont situés respectivement sur les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le plan de ce triangle enveloppera une surface* Σ *qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et qui sera inscrite à la développable formée par les plans menés à la surface* S *en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

Cette surface Σ est d'ailleurs conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces données.

Corollaires. — 1° *Lorsque quatre surfaces* S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passent par les mêmes points, on peut construire une surface* Σ *qui touche les huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *ainsi que les plans tangents de* S *menés en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

2° On prend pour S un cône. *Étant donnés trois surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et un cône ayant la même courbe d'intersection, si l'on prend sur ces surfaces respectivement trois points* a, b, c, *tels que les droites* da, db, dc, *menées au sommet* d *du cône, soient des diamètres conjugués de ce cône, le plan* abc *enveloppera une surface* Σ *qui sera inscrite au cône et qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*

Si, dans ce corollaire, on prend pour cône celui qui, ayant pour sommet le centre de Φ_1, passe par le cercle imaginaire de l'infini, nos surfaces sont homocycliques, et nous voyons que :

Étant données trois surfaces homocycliques Φ_1, Φ_2, Φ_3, *si l'on prend sur chacune d'elles des points* a, b, c *tels que le trièdre* $oabc$, *dont le sommet est au centre commun* o, *soit trirectangle en* o, *le plan* abc *enveloppera une sphère qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*