Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 557-562

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__557_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1262

(voir 2e série, t. XVII, p. 239);

PAR M. MORET-BLANC.

Un point F *est donné par ses coordonnées* α, β *relativement à deux axes* OX, OY, *comprenant entre eux un angle* θ : *on demande de trouver l'équation de l'hyperbole qui passe par l'origine* O, *qui a le point* F *pour un de ses foyers, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes* OX *et* OY.

Quatre hyperboles répondent à la question. L'équation de chacune d'elles étant de la forme

$$xy - px - qy = 0,$$

il s'agit de trouver les quatre couples de valeurs de p *et* q, *exprimées en fonction des données* α, β *et* θ.

(BOILLEAU.)

L'équation générale des hyperboles passant par l'origine et ayant leurs asymptotes parallèles aux axes OX, OY est

$$(1)\qquad xy - px - qy = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = q$, $y = p$.

Le foyer donné devant se trouver sur la bissectrice de l'un des angles des asymptotes, ses coordonnées doivent vérifier l'une des équations

$$y - p = x - q \quad \text{ou} \quad y - p = -(x - q),$$

c'est-à-dire satisfaire à l'une des relations

$$(2)\qquad p - q = \beta - \alpha$$

$$(3)\qquad p + q = \beta + \alpha.$$

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, son équation devient

$$(4)\qquad x'y' = pq.$$

Si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de la courbe, les formules de transformation sont

$$x' = \frac{x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}, \quad y' = \frac{x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta},$$

et l'équation devient

$$(5)\qquad x^2\sin^2\frac{\theta}{2} - y^2\cos^2\frac{\theta}{2} = pq\sin^2\theta.$$

Il y a deux cas à considérer :

1° Soit $pq > 0$.

On a, en appelant a^2 et b^2 les carrés des demi-axes,

$$a^2 = 4pq\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad b^2 = 4pq\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = 4pq, \quad c = \pm 2\sqrt{pq}.$$

Les coordonnées du foyer sont, dans le système (4),

$$c\,\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{c}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\pm\sqrt{pq}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

et l'on a, dans le système primitif,

$$(6)\qquad \beta-p=\alpha-q=\pm\frac{\sqrt{pq}}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

2° Soit $pq<0$.

On a alors, a étant l'axe transverse,

$$a^2=-4pq\sin^2\frac{\theta}{2},\quad b^2=-4pq\cos^2\frac{\theta}{2},\quad c^2=-4pq,$$

$$c=\pm 2\sqrt{-pq}.$$

Les coordonnées du foyer sont, dans le système (4),

$$\frac{c\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{c}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\pm\frac{\sqrt{-pq}}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

et l'on a, dans le système primitif,

$$(7)\qquad \beta-p=-(\alpha-q)=\pm\frac{\sqrt{-pq}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs de p et q sont déterminées par les systèmes (6) et (7).

Le système (6) donne

$$p=\frac{-(\alpha+\beta\cos\theta)\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$q=\frac{-(\beta+\alpha\cos\theta)\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs tirées du système (7) se déduisent des précédentes en changeant les signes de q et α. On a donc

$$p = \frac{(\alpha - \beta\cos\theta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$q = \frac{(\beta - \alpha\cos\theta) \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs de p et q sont faciles à construire graphiquement: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta} = \mathrm{OF}$; $\alpha + \beta\cos\theta$ et $\beta + \alpha\cos\theta$ sont les projections orthogonales de OF sur les axes de coordonnées. Les valeurs des numérateurs du second système se construisent aussi facilement, et l'on sait construire les quotients des demi-longueurs trouvées par $\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Fauquembergue, maître répetiteur au lycée de Saint-Quentin ; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon et J. Chambon.

Question 1269

(voir 2e série, t. XVII, p. 287);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Une droite AB, *de longueur constante, s'appuie sur deux axes rectangulaires* OX, OY : *lieu du point* M *de cette droite, tel que l'on ait*

$$\mathrm{MA}.\mathrm{AO} = \mathrm{MB}.\mathrm{BO}. \qquad (\text{Gambey.})$$

Appelons x et y les coordonnées du point M; φ l'angle

BAO, et a la longueur de AB. On doit avoir

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BO}{AO} = \tang\varphi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{MA}{\sin\varphi} = \frac{MB}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi};$$

mais $MA = \dfrac{y}{\sin\varphi}$, $MB = \dfrac{x}{\cos\varphi}$; on aura donc

$$\frac{y}{\sin^2\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Ces relations suffiraient pour construire le lieu cherché, puisque les coordonnées x et y sont exprimées en fonctions de la même variable φ; mais cherchons l'équation de la courbe. Les deux premiers rapports donnent

$$\frac{y}{\sin^2\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} = x + y,$$

d'où

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{y}{x+y}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{x}{x+y}};$$

l'équation de la courbe est donc

$$x + y = \frac{a\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x+y}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = a,$$

et, en faisant disparaître les radicaux,

$$(x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x+y)^2 + a^4 = 0. \tag{1}$$

Cette équation se simplifie, en prenant pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle XOY. Les formules de transformation sont, en effet, dans ce cas,

$$x = (x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = (x' + y')\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et l'équation devient

$$(2) \qquad x'^2 y'^2 - a^2 x'^2 + \frac{a^4}{4} = 0,$$

d'où

$$y' = \pm \frac{a}{x'}\sqrt{x'^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

La courbe est symétrique, par rapport aux nouveaux axes OX', OY'. On ne peut faire varier x' que de $-\infty$ à $-\frac{a}{2}$ et de $+\frac{a}{2}$ à $+\infty$.

Pour $x' = \pm\infty$, on a $y' = \pm a$; la courbe est donc asymptote à ces deux droites parallèles à OX'. La courbe se compose de deux branches infinies, concaves vers l'axe OX'; de plus, elle est tangente aux anciens axes à une distance de l'origine égale à a; ce qu'il est facile de vérifier en faisant successivement x et y égaux à zéro dans l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Moret-Blanc; Ferdinando Pisani; Sondat; J. Chambon; Albert Lacazette, élève du lycée de Bordeaux et Vladimir Habbé.