NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 537-557

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__537_1>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[suite (*).]

TRANSFORMATION DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Nous n'avons pas à parler de la transformation du premier degré; on a vu que non-seulement elle réussissait toujours, mais encore qu'elle servait à la réduction à la forme canonique.

Si l'on veut opérer la transformation du second degré, deux des facteurs $V - \alpha U$, $V - \beta U$, ... devront être

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 385.

des carrés parfaits; on devra donc poser

$$U - \alpha V = (my + m')^2, \quad U - \beta V = (ny + n')^2.$$

On en conclut

$$\frac{U - \alpha V}{U - \beta V} = \frac{(my + m')^2}{(ny + n')^2},$$

ou bien, en observant que $\frac{U}{V} = x$,

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = \frac{(my + m')^2}{(ny + n')^2}.$$

On pourra ensuite déterminer m, m', n, n' de manière à donner à la nouvelle intégrale la forme canonique, mais nous n'effectuerons pas le calcul en disant toutefois qu'il existe deux solutions à la question.

MÉTHODE D'ABEL.

Supposons que l'on désire calculer toutes les valeurs de y rationnelles par rapport à x, et telles que

$$\frac{dy^2}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} = \frac{\varepsilon^2 dx^2}{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Si l'on pose

$$y = \frac{P}{Q},$$

P et Q désignant des fonctions entières de degré μ, à chaque valeur de y correspondront μ valeurs de x, et si l'on désigne par x_1 et x_2 deux d'entre elles, on aura

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - k x_1^2)}} = \frac{\pm dx_2}{\sqrt{(1 - x_2)^2 (1 - k^2 x_2^2)}}.$$

Si l'on égale à du les deux membres de la formule précédente, on aura, si l'on veut,

$$x_1 = \operatorname{sn} u,$$
$$x_2 = \operatorname{sn}(\alpha \pm u),$$

α désignant une constante; on peut se borner à considérer le signe $+$, car $\operatorname{sn}(\alpha - u) = \operatorname{sn}(2K + u - \alpha)$ et $2K - \alpha$ est une constante. Ainsi, l'une des racines de l'équation $y = \frac{P}{Q}$ étant représentée par $\operatorname{sn} u$, les autres seront de la forme $\operatorname{sn}(u + \alpha)$. Si donc on pose $\frac{P}{Q} = \psi(x)$, on aura

$$y = \psi(\operatorname{sn} u)$$

identiquement, et, comme on a aussi $y = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + \alpha})$, il faut en conclure

$$\psi(\operatorname{sn} u) = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + \alpha}) = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + 2\alpha})\ldots;$$

par suite, les racines de $y = \psi(x)$ sont

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\overline{u + \alpha}, \quad \operatorname{sn}\overline{u + 2\alpha}, \quad \operatorname{sn}\overline{u + 3\alpha}, \quad \ldots;$$

mais les racines de l'équation en question sont en nombre limité au plus égal à μ : il est facile d'en conclure que les μ valeurs de x se décomposent en cycles

$$\begin{array}{llll} \operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u + \alpha), & \ldots, & \operatorname{sn}(u + \overline{n - 1}\,\alpha), \\ \operatorname{sn} u', & \operatorname{sn}(u' + \alpha), & \ldots, & \operatorname{sn}(u' + \overline{n - 1}\,\alpha), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

n désignant un sous-multiple de μ. Si μ est un nombre premier, les cycles se réduiront à un seul. Nous examinerons en particulier le cas où μ est un nombre premier impair. Les solutions de $y = \psi(x)$ sont alors

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}(u + \alpha), \quad \ldots, \quad \operatorname{sn}(u + \overline{\mu - 1}\,\alpha);$$

mais, $\operatorname{sn}(u + \mu\alpha)$ étant égal à $\operatorname{sn} u$, il faut que $\mu\alpha$ soit une période; donc

$$\alpha = \frac{1}{\mu}\left(4Km + 2K'n\sqrt{-1}\right).$$

Mais l'équation $y = \psi(x)$ est de la forme

$$(A_\mu - B_\mu y)x^\mu + \ldots + A_0 - B_0 y = 0;$$

on en déduit, pour le produit des racines,

$$x_1 x_2 \ldots x_\mu = \pm \frac{A_0 - B_0 y}{A_\mu - B_\mu y},$$

et pour y une expression de la forme

$$y = \frac{a' + a x_1 x_2 \ldots x_\mu}{b' + b x_1 x_2 \ldots x_\mu}.$$

On peut simplifier cette expression; on a en effet

$$x_i = \operatorname{sn}(u + \overline{i-1}\,\alpha),$$
$$x_{\mu-i} = \operatorname{sn}(u + \mu\alpha - \overline{i-1}\,\alpha) = \operatorname{sn}(u - \overline{i-1}\,\alpha),$$

car $\mu\alpha$ est une période, et, en faisant usage d'une formule connue,

$$x_i x_{\mu-i} = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(i-1)\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(i-1)\alpha};$$

on a donc

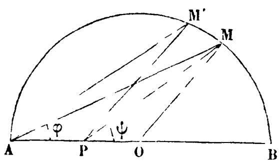
$$x_1 x_2 \ldots x_\mu = \frac{\operatorname{sn} u(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\alpha)(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 2\alpha)\ldots\left(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\frac{\mu-1}{2}\alpha\right)}{(1 - k^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn}\alpha)\ldots\left(1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}\frac{\mu-1}{2}\alpha\right)}.$$

Le produit $x_1 x_2 \ldots x_\mu$ est ainsi exprimé à l'aide de la seule racine $x_1 = \operatorname{sn} u$. Alors y prend la forme

$$y = \frac{a' + a\varphi(x_1)}{b' + b\varphi(x_1)}.$$

TRANSFORMATION DE LANDEN.

Considérons un demi-cercle tracé sur $AB = 2R$ comme diamètre : soient O son centre, P un point fixe pris sur AB, M un point variable de la circonférence, soient $OP = a$, $MPO = \psi$, $MAO = \varphi$. Supposons que le



point M se déplace infiniment peu et posons $MM' = ds$, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{ds}{MP} = \frac{\sin M'PM}{\sin PM'M}.$$

Or

$$ds = 2R\,d\varphi, \quad MP = \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}, \quad M'PM = d\psi,$$

et $MM'P$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ plus l'angle que OM fait avec MP ou PMO; (1) devient alors

$$(2) \qquad \frac{2R\,d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}} = \frac{d\psi}{\cos PMO}.$$

Si l'on observe alors que

$$\frac{R}{\sin\psi} = \frac{a}{\sin PMO}$$

ou

$$R \sin PMO = a \sin\psi,$$

$$R^2 \cos^2 PMO = R^2 - a^2 \sin^2\psi,$$

la formule (2) deviendra

$$\frac{2\,d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}},$$

ou bien

$$\frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(R+a)^2 - 4aR\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}},$$

ou enfin

$$\frac{2R}{R+a}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4aR}{(R+a)^2}\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\psi}}.$$

Posons

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{4aR}{(R+a)^2}} = k, \quad \frac{a}{R} = k_1,$$

et nous aurons

$$(4) \qquad \frac{2R}{R+a}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Le triangle PMO donne d'ailleurs

$$\frac{a}{R} = k_1 = \frac{\sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi},$$

d'où

$$\frac{1 - k_1}{1 + k_1} = \frac{\sin\psi - \sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi + \sin(2\varphi - \psi)},$$

ou bien

$$(5) \qquad \frac{1 - k_1}{1 + k_1} = \frac{\operatorname{tang}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tang}\varphi};$$

d'ailleurs les équations (3) donnent

$$(6) \qquad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1},$$

et la formule (4) devient

$$(7) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{2}{1 + k_1}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Voici comment on fera usage de ces formules : supposons que l'on veuille calculer

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\psi}},$$

on calculera à l'aide de (6) un nouveau module k, et à l'aide de la substitution (5) (que l'on n'aura pas besoin d'effectuer réellement si l'on n'a pas besoin de faire un calcul numérique), on convertira l'intégrale proposée en une autre de module k, donné par la formule (6). Il est facile de prouver que $k < k_1$; en répétant alors la substitution, on peut ainsi obtenir ce que l'on appelle une *échelle de modules* de plus en plus voisins de un; on pourra donc développer l'intégrale suivant les puissances de $1 - k$, et l'on aura une série très-convergente.

Je dis, en effet, que $k < k_1$: c'est ce que prouve la formule (6), car la moyenne arithmétique $\frac{1+k_1}{2}$ de 1 et k_1 est moindre que leur moyenne géométrique $\sqrt{k_1}$: ainsi $k < 1$; donc on finira par rendre $k < 1$. Supposons déjà $k_1 < 1$, on a

$$\frac{1+k_1}{2} > 1 :$$

donc $\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} > \sqrt{k_1} > k_1$; ainsi $k > k_1$, mais $k < 1$: donc, etc.

On peut donc aussi se donner k et calculer k_1; si alors k est moindre que l'unité, on aura $k_1 < k$, et l'on obtiendra des modules tendant vers zéro; quand k sera très-petit, l'intégrale elliptique développée suivant les puissances de k sera rapidement convergente.

Il est facile de voir que, si l'on pose

$$k = \sin\theta,$$

on aura

$$k_1 = \mathrm{tang}^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\mathrm{tang}(\psi - \varphi) = \cos\theta \, \mathrm{tang}\varphi,$$

ce qui simplifie le calcul logarithmique.

SUR LES APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

Nous avons vu que toute intégrale d'une fonction rationnelle de x et d'un radical tel que

$$\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

se ramenait à trois types simples ne renfermant plus que le radical

$$\sqrt{\mathrm{A}(1 + mx^2)(1 + m'x^2)}.$$

Ce radical, dans lequel A, m, m' peuvent être supposés réels, comme on l'a vu, si a, b, c, d, e le sont eux-mêmes, peut se ramener au suivant :

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

en faisant sortir A de dessous le radical et en posant $mx^2 = -z^2$ et $-\frac{m'}{m} = k^2$; mais alors k n'est pas nécessairement réel. Je me propose maintenant de montrer que l'on peut toujours supposer k réel et compris entre zéro et 1, ce qui simplifiera évidemment la construction des Tables des fonctions elliptiques.

D'abord, on peut toujours supposer $\mathrm{A} = \pm 1$ en faisant sortir sa valeur absolue de dessous le radical; enfin, on peut supposer $m = \pm 1$, en posant $x\sqrt{m} = z$, si m est positif, et $x\sqrt{-m} = z$, si z est négatif. Ainsi nous pourrons toujours supposer $m = \pm 1$ et $m' = \pm k^2$. Cela posé, on a vu et l'on vérifie très-facilement que, en posant $k'^2 = 1 - k^2$,

$$(1) \quad \text{Si} \quad z = \operatorname{sn} x, \quad \text{on a} \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

$$(2) \quad z = \frac{1}{\operatorname{sn} x}, \quad \frac{dz}{dx} = -k\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{k^2}z^2\right)},$$

$$(3) \quad z = \operatorname{dn} x, \quad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{-(1-z^2)\left(1-\frac{1}{k'^2}z^2\right)},$$

$$(4) \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} x}, \quad \frac{dz}{dx} = -\sqrt{-(1-z^2)(1-k'^2z^2)},$$

$$(5) \quad z = \operatorname{tn} x, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(1+z^2)(1+k'^2z^2)},$$

$$(6) \quad z = \frac{1}{\operatorname{tn} x}, \quad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{(1+z^2)\left(1+\frac{1}{k'^2}z^2\right)},$$

$$(7) \quad z = \operatorname{cn} x, \quad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{(1-z^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}z^2\right)},$$

$$(8) \quad z = \frac{1}{\operatorname{cn} x}, \quad \frac{dz}{dx} = k\sqrt{-(1-z^2)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}z^2\right)}.$$

Dans ces formules, on peut constater que le radical est partout de la forme

$$\sqrt{\pm(1 \mp z^2)(1 \pm k_1^2 z^2)},$$

et que l'on y rencontre toutes les combinaisons possibles des signes avec toutes les valeurs réelles et positives de k_1^2, en supposant $k^2 < 1$, trois combinaisons exceptées, à savoir

$$\sqrt{-(1+z^2)(1+k_1^2z^2)}, \quad \sqrt{\pm(1+z^2)(1-k_1^2z^2)};$$

mais la première est impossible si le radical doit être réel, et les deux autres rentrent dans les formes (7) et

(8) par le changement de $\frac{k}{k'}z$ en z ou de $\frac{k'}{k}z$ en z. Nous n'en parlerons donc pas.

Il résulte de là que toutes les équations de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{A}\sqrt{\pm(1 \pm m z^2)(1 \pm m' z^2)}$$

s'intégreront par les fonctions elliptiques, et que toute intégrale de la forme

$$\int \mathrm{F}\left[z, \sqrt{\pm(1 + m z^2)(1 + m' z^2)}\right] dz$$

se ramènera à la forme

$$\int f\left[z, \sqrt{(1 - z^2)(1 - k_1^2 z^2)}\right] dz,$$

où l'on aura

$$k_1^2 < 1.$$

Montrons sur un exemple la marche à suivre pour opérer cette réduction. Supposons qu'il s'agisse de l'intégrale

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 - k_1^2 z^2)}};$$

en posant $k_1 z = \zeta$, on aura

$$u = \frac{1}{k_1}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)\left(1 + \frac{1}{k_1^2}\zeta^2\right)}}.$$

On posera [*voir* formule (7)]

$$\frac{1}{k_1^2} = \frac{k^2}{1 - k^2},$$

d'où

$$k^2 = \frac{1}{1 + k_1^2} < 1,$$

et l'on aura

$$(a)\qquad u = \frac{k}{k'}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\zeta^2\right)}}.$$

On en conclut que ζ est égal à $\operatorname{cn}\left(-\frac{k'^2}{k}u + \text{const.}\right)$, et par suite que

$$\sqrt{1-\zeta^2} = \operatorname{sn}\left(-\frac{k'^2}{k}u + \text{const.}\right).$$

Si donc on pose

$$\sqrt{1-\zeta^2} = z,$$

z sera le sinus amplitude d'un multiple de u, et l'intégrale u sera ramenée à la forme voulue

$$u = -\frac{1}{k}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

La méthode de réduction que nous venons d'indiquer a, sur celles que l'on enseigne, l'avantage d'être purement analytique; elle se retrouve facilement; si l'on n'indique pas la marche qui conduit aux substitutions à effectuer, on peut hésiter longtemps avant de les retrouver. D'ailleurs, notre méthode a l'avantage de donner immédiatement z exprimé en fonction de u au moyen des fonctions sn, cn, dn.

Voici d'ailleurs les substitutions à effectuer dans les différents cas pour réduire l'intégrale

$$\int F\left[x, \sqrt{A(1+mx^2)(1+m'x^2)}\right] dx$$

à la forme

$$\int f\left[z, \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right] dz \quad \text{ou} \quad k < 1,$$

d'après MM. Briot et Bouquet, 1re édition, p. 194

1° A positif, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$, on pose

$$x = \frac{z}{h}.$$

2° A positif, $m = -h^2$, $m' = h'^2$,

$$hx = \sqrt{1 - z^2}.$$

3° A positif, $m = h^2$, $m' = h'^2$, $h > h'$,

$$hx = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

4° A négatif, $m = -h^2$, $m' = h'^2$,

$$hx = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

5° A négatif, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$,

$$h'x = \sqrt{1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2}.$$

Quand on a ramené le radical à la forme voulue, il reste encore à calculer les quantités que l'on a désignées par K et K' et dont dépendent les périodes. A cet effet, on calcule d'abord la quantité $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$; on part pour cela de la formule

$$\mathrm{dn}\, x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on a

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

On pourra résoudre cette équation par la méthode du retour des suites. Quand on connaît q, K se calcule facilement, et, en effet, on a

$$\frac{\mathrm{sn}\, x}{x} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{x\Theta(x)},$$

et, pour $x = 0$,

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)}.$$

En faisant, dans l'expression de $\operatorname{sn} x$, $x = K$, $\operatorname{sn} x$ devient égal à 1, et l'on a

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(K)}{\Theta(K)};$$

donc

$$1 = \frac{H'(0)\,\Theta(K)}{H(K)\,\Theta(0)}.$$

Remplaçons $H'(0) = \lim \frac{H(x)}{x}$ pour $x = 0$, $\Theta(K)$, $H(K)$ et $\Theta(0)$ par leurs développements en produits, nous aurons

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2\ldots} \frac{(1+q)^2(1+q^3)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2\ldots}$$

ou

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots}{(1-q)(1-q^3)\ldots} \frac{(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1-q)(1-q^3)\ldots(1+q^2)(1+q^4)\ldots}$$

$$= (1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

C'est précisément la valeur de $\Theta_1(0)$.

On a donc finalement

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 - \ldots,$$

d'où l'on conclut K.

Mais il est clair que l'on pourra aussi calculer K et K′ par les formules

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

en les développant en série. Si k est voisin de l'unité, K sera donné par une série peu convergente; mais K' sera alors donné par une série très-convergente. Pour augmenter la convergence des séries, on pourra employer la transformation de Landen.

Le développement en série de K, par exemple, se fera comme il suit :

$$\left[(1-x^2)(1-k^2x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{k^4x^4}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

REMARQUE.

Les formules (1), (2), ..., (8) du paragraphe précédent conduisent à des formules curieuses que l'on peut rapprocher des formules élémentaires

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Considérons, par exemple, la formule (5); on en tire

$$x = \int \sqrt{(1+z^2)(1-k'^2z^2)}\,dz.$$

Or z, étant la tangente amplitude de x, s'annule avec x : on doit donc prendre pour limite inférieure de l'intégrale zéro; mais alors on a

$$\sqrt{-1}\,z = \operatorname{sn}(k', x\sqrt{-1}),$$

ou bien

$$\operatorname{tn}(k, x) = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{sn}(k', x\sqrt{-1}),$$

ou encore

$$\frac{\operatorname{sn}(k, x)}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(k, x)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{sn}(k', x\sqrt{-1}).$$

Il est clair que l'on pourrait obtenir ainsi une infinité de formules du même genre, mais qui seront plus curieuses qu'utiles.

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES ELLIPTIQUES.

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

$$\Theta\,(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} - \ldots,$$

$$\mathrm{H}\,(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi x}{2K} - \ldots,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \ldots,$$

$$c = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

$$\Theta\,(x) = c\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$\Theta_1(x) = c\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$\mathrm{H}\,(x) = 2cq^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2cq^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$\Theta(-x) = \Theta(x), \qquad \Theta_1(-x) = \Theta_1(x),$$

$$\mathrm{H}(-x) = -\mathrm{H}(x), \qquad \mathrm{H}_1(-x) = \mathrm{H}_1(x),$$

$$\Theta\,(x+K) = \Theta_1(x), \qquad \Theta\,(x-K) = \Theta_1(x),$$

$$\Theta_1(x+K) = \Theta\,(x), \qquad \Theta_1(x-K) = \Theta\,(x),$$

$$\mathrm{H}\,(x+K) = \mathrm{H}_1(x), \qquad \mathrm{H}\,(x-K) = -\mathrm{H}_1(x),$$

$$\mathrm{H}_1(x+K) = -\mathrm{H}\,(x), \qquad \mathrm{H}_1(x-K) = \mathrm{H}\,(x),$$

$$\begin{aligned}
\Theta\,(x+2\mathrm{K}) &= \quad\Theta\,(x),\\
\Theta_1(x+2\mathrm{K}) &= \quad\Theta_1(x),\\
\mathrm{H}\,(x+2\mathrm{K}) &= -\,\mathrm{H}\,(x),\\
\mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K}) &= -\,\mathrm{H}_1(x).
\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(2x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4\mathrm{K}}(2x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} = \mathrm{B},$$

on a

$$\begin{aligned}
\Theta\,(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= -\,\mathrm{A}\Theta\,(x), &\quad \Theta\,(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\,\mathrm{BH}\,(x),\\
\Theta_1(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \quad\mathrm{A}\Theta_1(x), &\quad \Theta_1(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \mathrm{BH}_1(x),\\
\mathrm{H}\,(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= -\,\mathrm{AH}\,(x), &\quad \mathrm{H}\,(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\,\mathrm{B}\Theta(x),\\
\mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \quad\mathrm{AH}_1(x), &\quad \mathrm{H}_1(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= \mathrm{B}\Theta_1(x).
\end{aligned}$$

$\Theta\,(x)$ s'annule pour $x = 2i\mathrm{K} + (2j+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}$,

$\Theta_1(x)$ » $x = (2i+1)\mathrm{K} + (2j+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}$,

$\mathrm{H}\,(x)$ » $x = 2i\mathrm{K} + 2j\mathrm{K}'\sqrt{-1}$,

$\mathrm{H}_1(x)$ » $x = (2i+1)\mathrm{K} + 2j\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$k' = \sqrt{1-k^2},$$

$$\mathrm{sn}\,x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \quad \mathrm{cn}\,x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \quad \mathrm{dn}\,x = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

$\mathrm{sn}\,x$ s'annule pour $x = 0$ et $2\mathrm{K}$,

$\mathrm{cn}\,x$ » $x = \mathrm{K}, \ -\mathrm{K}$,

$\mathrm{dn}\,x$ » $x = \pm\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1}$,

Périodes de $\mathrm{sn}\,x = 4\mathrm{K}, \ 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$,

» $\mathrm{cn}\,x = 4\mathrm{K}, \ 2\mathrm{K}'\sqrt{-1} + 2\mathrm{K}$,

» $\mathrm{dn}\,x = 2\mathrm{K}, \ 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

Infinis des trois fonctions $= \mathrm{K}'\sqrt{-1}, \ 2\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

$\operatorname{sn} 0 = 0,$	$\operatorname{cn} 0 = 1,$	$\operatorname{dn} 0 = 1,$
$\operatorname{sn} K = 1,$	$\operatorname{cn} K = 0,$	$\operatorname{dn} K = k',$
$\operatorname{sn} 2K = 0,$	$\operatorname{cn} 2K = 1,$	$\operatorname{dn} 2K = 1,$
$\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty,$	$\operatorname{cn} K'\sqrt{-1} = \infty,$	$\operatorname{dn} K'\sqrt{-1} = \infty,$
$\operatorname{sn} 2K'\sqrt{-1} = 0,$	$\operatorname{cn} 2K'\sqrt{-1} = -1,$	$\operatorname{dn} 2K'\sqrt{-1} = -1,$
$\operatorname{sn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{k},$	$\operatorname{cn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = -\frac{k'\sqrt{-1}}{k},$	$\operatorname{dn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = 0,$
$\operatorname{sn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty,$	$\operatorname{cn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty,$	$\operatorname{dn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty,$
$\operatorname{sn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1}\right) = 0,$	$\operatorname{cn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1}\right) = -1,$	$\operatorname{dn}\left(2K + 2K'\sqrt{-1}\right) = -1.$
$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}(2K \pm x) = \operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} x},$	$\operatorname{cn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = -\frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$	$\operatorname{dn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = -\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x},$
$\operatorname{sn}(K + x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$	$\operatorname{cn}(K + x) = -k'\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x},$	$\operatorname{dn}(K + x) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x},$
$\operatorname{sn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = \operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = -\operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = -\operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$	$\operatorname{cn}' x = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,$	$\operatorname{dn}' x = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$

$$\mathrm{sn}\,(a \pm b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b \pm \mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

$$\mathrm{cn}\,(a \pm b) = \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b \mp \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

$$\mathrm{dn}\,(a \pm b) = \frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b \mp k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

$$\int_0^x k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,dx = cx - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \mathrm{Z}(x),$$

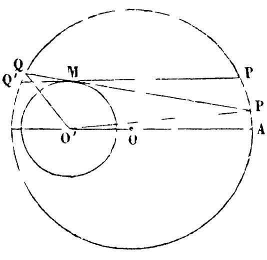
$$c = 8\,\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 - \ldots}{q - 4q^4 + 9q^9 - \ldots},$$

$$\int_0^x \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 x}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x}\,dx = \Pi(x, a)$$

$$= x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

THÉORÈME DE PONCELET.

Voici encore une interprétation très-curieuse du théorème qui vient de nous occuper : considérons deux cercles intérieurs l'un à l'autre; soient R et r leurs



rayons et PQ, P'Q' deux tangentes infiniment voisines menées au cercle de rayon r; soit OO' la ligne des centres

$$\mathrm{arc\,AP} = 2\varphi\mathrm{R}, \quad \mathrm{arc\,AQ} = 2\psi\mathrm{R}.$$

On aura

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{d\varphi}{d\psi};$$

mais les triangles semblables $PP'M$, $QQ'M$ donnent

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{MP}{MQ'} = \frac{M}{MQ};$$

ainsi

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{MP}{MQ};$$

or, à la limite, le point M vient sur le cercle r au point de contact de PQ, et l'on a

$$\overline{MP}^2 = \overline{O'P}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\varphi,$$

$$\overline{MQ}^2 = \overline{O'Q}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\psi:$$

on a donc

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sqrt{\frac{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\varphi}{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\varphi}{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\psi}}.$$

Si l'on fait

$$k^2 = \frac{2aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

on a l'équation connue

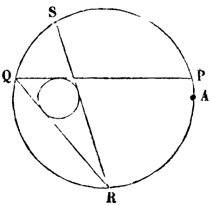
$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on peut conclure une construction géométrique de son intégrale. Mais on peut en déduire un résultat nouveau.

L'équation précédente devient, en intégrant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} &+ \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \\ &= \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} \end{aligned} \right.$$

et μ est la valeur de ψ pour $\varphi = 0$. On voit que μ ne dépend ni de φ ni de ψ; si donc, à partir du point φ, on mène une seconde tangente QR au cercle intérieur, et



si l'on pose $AR = 2\chi$, on aura encore, en posant

$$1 - k^2\sin^2\varphi = \Phi, \quad 1 - k^2\sin^2\psi = \Psi, \quad \ldots, \quad 1 - k^2\sin^2\mu = M,$$

$$(3) \qquad -\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}} + \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{X}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}};$$

en menant par R une nouvelle tangente RS, on aurait entre l'arc $2\theta = AS$ et l'arc 2χ une relation analogue: les intégrales $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}$, $\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Psi}}$, ... forment donc une progression arithmétique dont la raison est $\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$.

Supposons que le polygone PQRST soit fermé et que le point T coïncide avec A, le dernier des arcs $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ sera de la forme $\varphi + 2n\pi$. En ajoutant alors les formules, telles que (2) et (3), on a

$$-\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} + \int_0^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = m \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$$

ou bien

$$\int_{\varphi}^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = m\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}};$$

donc le premier membre de cette formule ne dépend pas de φ; donc :

S'il existe un polygone de m côtés inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, il existera une infinité de polygones de m côtés jouissant de la même propriété.

Ce théorème est évidemment projectif et s'applique aux coniques : il a été découvert par Poncelet; la démonstration précédente est de Jacobi.