NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 536-537

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__536_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. LIOUVILLE, CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Liouville a démontré, dans son cours au Collége de France, qu'un nombre quelconque est une somme de 53 bicarrés, au plus. On peut abaisser cette limite à 41. En effet, il résulte de l'identité des deux expressions

$$6(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)^2$$

et

$$\begin{gathered}(x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+u)^4 + (x-u)^4 \\ + (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+u)^4 + (y-u)^4 + (z+u)^4 + (z-u)^4\end{gathered}$$

que le sextuple du carré d'un nombre quelconque est une somme de 12 bicarrés, puisque l'on sait qu'un nombre quelconque est une somme de 4 carrés. Par suite, le sextuple d'une somme de 3 carrés est décomposable en 36 bicarrés. Mais Legendre a démontré que tout nombre de la forme

$$8p + 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$$

est une somme de 3 carrés; donc tout nombre de la forme

$$48p + 6,\ 12,\ 18,\ 30,\ 36$$

est une somme de 36 bicarrés, au plus. Soit R le reste de la division d'un nombre N par 48; en retranchant de N une ou plusieurs fois les bicarrés 1^4, 2^4, 3^4, on ramène le reste R à l'un des nombres 6, 12, 18, 30, 36, et l'on arrive à former le tableau suivant, qui contient dans la colonne R le reste de la division d'un nombre N par 48, et dans la colonne n le nombre maximum de bicarrés dont se compose N.

n	R
36	6, 12, 18, 30, 36;
37	3, 4, 7, 13, 15, 19, 21, 22, 28, 31, 34, 37, 39, 46;
38	0, 2, 5, 8, 14, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 35, 38, 40, 44, 47;
39	1, 9, 17, 25, 33, 41, 45;
40	10, 26, 42;
41	11, 27, 43.

Donc *un nombre entier quelconque est la somme de quarante et un bicarrés, au plus.*

On observera que la démonstration précédente suppose le théorème vérifié jusqu'à $N = 2.3^4$; il est facile de le constater sur les *Tables arithmétiques* de Reuschle.