Nouvelles annales de mathématiques

E. de Jonquières

Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme x^2+ty^2, t étant un nombre rationnel, positif ou négatif ; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées $y=x^2+t(x+\alpha)^2$, $y^2=z^2+t(z+\beta)^2$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 433-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__433_0>

Décomposition du carré d'un nombre N *et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme* $x^2 + ty^2$, *t étant un nombre rationnel, positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées*

$$y = x^2 + t(x + \alpha)^2, \quad y^2 = z^2 + t(z + \beta)^2;$$

[FIN (*).]

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans le cas de t négatif, dont je viens de donner un exemple, il importe d'ajouter que les décompositions fournies par les formules (1') sont, en moindres nombres, celles de chacune desquelles il en découle une infinité d'autres par les relations

$$(4) \qquad x = x_1 r \pm t . y_1 s, \quad y = x_1 s \pm y_1 r,$$

r et s étant des indéterminées données par l'équation $(m + n\sqrt{t})^k = r + s\sqrt{t}$, dans laquelle k est un entier quelconque, et m, n sont les moindres nombres qui satisfont à l'équation $m^2 - tn^2 = 1$. (Voir *Théorie des nombres*, Ire Partie, § 40).

Dans l'exemple précédent, les moindres nombres qui satisfont à l'équation $m^2 - 3n^2 = 1$ sont $m = 2$, $n = 1$; ainsi r et s sont donnés, dans ce cas, par la formule $r + s\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^k$.

Si l'on prend d'abord $k = 1$, on a $r = 2$, $s = 1$; la seconde décomposition de N^2 donne pour N celle-ci

$$481 = \overline{23}^2 - 3.\overline{4}^2,$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 419.

et les formules (4) deviennent

$$x = 23.2 \pm 3.8, \quad y = 23 \pm 8.2.$$

On en déduit, pour la plus simple des décompositions de 481 après celle que je viens d'écrire,

$$481 = \overline{34}^2 - 3.\overline{15}^2.$$

Les formules (4) en fournissent ensuite une infinité d'autres.

VI. Il reste à examiner, comme je l'ai fait au § XI de l'article précité des *Nouvelles Annales*, page 303, le cas où le nombre donné N se compose de facteurs premiers élevés chacun à une puissance quelconque, et non plus seulement de facteurs du premier degré. Sans entrer, à cet égard, dans des développements qui m'entraîneraient trop loin, je me bornerai à dire que, si cette circonstance fait croître le nombre total des décompositions de N, elle n'augmente pas celui des décompositions de ce nombre dans lesquelles les composants sont premiers entre eux. Au contraire, si parmi les facteurs premiers de N il en existe qui, au lieu d'être décomposables dans la forme donnée $x^2 + ty^2$, sont simplement des diviseurs linéaires d'une même forme quadratique associée à celle-là, le nombre de ces décompositions est diminué lorsque ces facteurs n'entrent pas par paires avec le même exposant dans la composition de N, ou avec des exposants différant entre eux d'un nombre pair d'unités. La même influence se fait d'ailleurs sentir alors sur les décompositions propres de N^2, et la correspondance qui lie celles-ci à celles de N n'est pas troublée.

Supposons, par exemple, que le nombre à décomposer soit $N = 57967 = 7^3.13^2$, et que la forme requise soit $x^2 + 3y^2$. Les facteurs premiers 7 et 13 sont l'un et l'autre de cette forme. Leurs exposants respectifs étant d'ailleurs 3 et 2, le nombre total des décompositions de N est, d'après la formule connue, égal à $\frac{1}{2}(3+1)(2+1)=6$, c'est-à-dire plus grand de quatre unités que celui des décompositions de même forme du nombre $7.13=91$, qui ne comporte que ces deux-ci :

$$91=8^2+3.3^2=4^2+3.5^2;$$

mais, parmi ces six décompositions de N, il n'en existe pareillement que deux où les composants soient premiers entre eux; ce sont les suivantes :

$$N=2^2+3.\overline{139}^2=\overline{218}^2+3.\overline{59}.$$

Dans les quatre autres, savoir

$$\begin{aligned} N &= 7^2\left(10^2+3.\overline{19}^2\right)=7^2(34^2+3.3^2) \\ &= 13^2(10^2+3.9^2) \;=7^2.13^2(2^2+3.1^2), \end{aligned}$$

les composants ont pour facteur commun, respectivement, les nombres 7^2, 13^2 et $7^2.13^2$.

Quant aux décompositions possibles de N^2, il n'y en a également que deux *propres* ou de dernière espèce, savoir

$$N^2=\overline{57959}^2+3.\overline{556}^2 \quad \text{et} \quad N^2=\overline{37081}^2+3.\overline{25724}^2,$$

correspondant, respectivement, à celles de N écrites ci-dessus en premier lieu. Dans toutes les autres, les composants ont un facteur commun.

Prenons, pour second exemple, la forme x^2+19u^2 et le nombre $N=6125=5^3.7^2$. Ici les facteurs 5 et 7 ne sont plus, comme précédemment, des diviseurs quadratiques : ce sont de simples diviseurs linéaires de la forme requise. Cette circonstance, jointe à ce que le facteur 5 a l'exposant 3, tandis que 13 n'a que l'exposant 2, fait que N n'est susceptible d'aucune décomposition où les composants soient premiers entre eux, et il en est de même, par conséquent, de N^2. En effet, les seules décompositions possibles de N sont

$$6125 = 5^2(13^2 + 19.2^2) = 7^2(7^2 + 19.2^2),$$

auxquelles correspondent, respectivement, celles de N^2

$$\overline{6125}^2 = 5^4(\overline{93}^2 + 19.\overline{52}^2) = 7^4(\overline{27}^2 + 19.\overline{28}^2).$$

Mais, si le nombre donné avait été $N = 1225 = 5^2.7^2$, les formules (1)' auraient donné

$$\overline{1225}^2 = (\overline{1207}^2 + 19.\overline{48}^2),$$

d'où

$$1225 = 3^2 + 19.8^2,$$

parce que les exposants de 5 et de 7 sont ici égaux entre eux, etc.

VII. Avant d'entamer un autre sujet, il me reste à dire quelques mots touchant le cas de t fractionnaire, $t = \frac{p}{q}$.

Lorsque tous les facteurs du nombre N sont de la forme $a^2 + \frac{p}{q} b^2$, ou y ont été ramenés, les formules (1)' donnent, aussi bien que dans le cas de t entier, toutes les décompositions de dernière espèce $X^2 + \frac{p}{q} Y^2$ de son carré N^2. Puis lorsqu'on veut revenir de ces décompositions à celles $x^2 + \frac{p}{q} y^2$ de N qui leur correspondent, on se sert, comme dans les autres cas, des formules

$$(2) \qquad x^2 = \frac{N + X}{2}, \quad y^2 = \frac{N - X}{2t},$$

dont la composition montre que, si l'on a seulement pour but de trouver les représentations de N dans la forme $u^2 + \frac{p}{q} v^2$, on peut se dispenser de calculer les valeurs de Y.

Mais en outre, si l'on remplace (*) les formules (1)' par les suivantes :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} = {} & \Pi_n(qa^2 - pb^2) \\
& - 2^2 pq\ \Sigma[\Pi_2\, ab \,.\, \Pi_{n-2}(qa^2 - pb^2)] \\
& + 2^4 p^2 q^2\ \Sigma[\Pi_4\, ab \,.\, \Pi_{n-4}(qa^2 - pb^2)] \\
& - 2^6 p^3 q^3\ \Sigma[\Pi_6\, ab \,.\, \Pi_{n-6}(qa^2 - pb^2)] + \ldots, \\
\sqrt{\frac{q}{p}}\ \mathrm{Y} = {} & 2q\ \Sigma[\Pi_1\, ab \,.\, \Pi_{n-1}(qa^2 - pb^2)] \\
& - 2^3 pq^2\, \Sigma[\Pi_3\, ab \,.\, \Pi_{n-3}(qa^2 - pb^2)] \\
& + 2^5 p^2 q^3\, \Sigma[\Pi_5\, ab \,.\, \Pi_{n-5}(qa^2 - pb^2)] - \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

celles-ci donnent les décompositions propres, dans la forme $\mathrm{X}^2 + \frac{p}{q}\mathrm{Y}^2$, du carré N^2 d'un nombre N dont tous les facteurs sont de la forme $qa^2 + pb^2$; et lorsqu'on veut passer de ces décompositions à celles $x^2 + \frac{p}{q} y^2$ correspondantes, il se présente cette particularité, qui n'avait pas lieu dans la précédente, que les nombres $\frac{\mathrm{N} + \mathrm{X}}{2}$,

(*) La modification apportee n'est d'ailleurs pas aussi grande qu'on pourrait le croire au premier aperçu, car les formules (1)', ou j'ai avec intention laissé figurer le radical $\sqrt{t}$ pour mieux faire ressortir la façon dont elles derivent des formules (1), peuvent s'ecrire ainsi :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X} = {} & \Pi_n(a^2 - t.b^2) - 2^2.t\,\Sigma[\Pi_2(ab)\,\Pi_{n-2}(a^2 - t.b^2)] \\
& + 2^4.t^2\,\Sigma[\Pi_4(ab)\,\Pi_{n-4}(a^2 - t.b^2)] \\
& - 2^6.t^3\,\Sigma[\Pi_6(ab)\,\Pi_{n-6}(a^2 - t.b^2)] + \ldots, \\
\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{Y} = {} & 2\,\Sigma[\Pi_1(ab)\,\Pi_{n-1}(a^2 - t.b^2)] \\
& - 2^3\, t\,\Sigma[\Pi_3(ab)\,\Pi_{n-3}(a^2 - t.b^2)] + 2^5.t^2\,\Sigma[\Pi_5(ab)\,\Pi_{n-5}(a^2 - t.b^2)] - \ldots
\end{aligned}
$$

et même sont, sous cette forme, plus commodes pour le calcul numérique.

$\frac{N - X}{2t}$ ainsi obtenus, quoique satisfaisant à la relation $x^2 + \frac{p}{q} y^2 = N$, ne sont des carrés parfaits que si le nombre des facteurs de N est pair. Lorsque ce nombre est impair, on a en revanche

$$x^2 = pk^2, \quad \frac{p}{q} y^2 = qm^2 \quad \text{et} \quad pk^2 + qm^2 = N.$$

Voici quelques exemples de ces différents cas :

1° Soit $t = \frac{3}{8}$,

$$N = 16863 = 7.33.73 = \left(1^2 + \frac{3}{8} 4^2\right)\left(3^2 + \frac{3}{8} 8^2\right)\left(7^2 + \frac{3}{8} 8^2\right).$$

Les formules (1)' donnent, pour l'une des décompositions propres de N^2,

$$N^2 = \overline{16863}^2 = \overline{13395}^2 + \frac{3}{8} \overline{16728}^2,$$

et les formules (2) donnent, pour la décomposition correspondante de N,

$$N = 16863 = \overline{123}^2 + \frac{3}{8} \overline{68}^2.$$

On obtiendrait de même les trois autres solutions.

2° Soit encore $t = \frac{3}{8}$,

$$N = 511 = 7.73 = \left(1^2 + \frac{3}{8} 4^2\right)\left(7^2 + \frac{3}{8} 8^2\right).$$

Les formules (1)' et (2) donnent, respectivement,

$$N^2 = \overline{511}^2 = \overline{461}^2 + \frac{3}{8} \overline{360}^2 = \overline{211}^2 + \frac{3}{8} \overline{760}^2,$$

$$N = 511 = 5^2 + \frac{3}{8} \overline{36}^2 = \overline{29}^2 + \frac{3}{8} \overline{20}^2.$$

3° Soit, comme première application du cas où les facteurs de N sont de la forme $qa^2 + pb^2$,

$$\begin{aligned} N = 94105 &= 5.11.29.59 \\ &= (2.1^2 + 3.1^2)(2.2^2 + 3.1^2)(2.1^2 + 3.3^2)(2.4^2 + 3.3^2). \end{aligned}$$

Les formules (3) donnent, pour l'une des huit solutions de quatrième espèce qu'on en peut déduire,

$$N^2 = \overline{94105}^2 = \overline{72937}^2 + \frac{3}{2}\overline{48552}^2,$$

et les formules (2) donnent ensuite, pour la décomposition correspondante de N,

$$N = 94105 = \overline{281}^2 + \frac{3}{2}\overline{84}^2.$$

Dans cet exemple, le nombre des facteurs du nombre donné est pair, et les facteurs ont la forme $2a^2 + 3b^2$.

4° Soit enfin

$$\begin{aligned} N = 1595 &= 5.11.29 \\ &= (2.1^2 + 3.1^2)(2.2^2 + 3.1^2)(2.1^2 + 3.3^2), \end{aligned}$$

où le nombre des facteurs est impair, et la forme est, comme à l'exemple précédent, $2a^2 + 3b^2$; les formules (3) donnent, pour les quatre décompositions de troisième espèce de N^2,

$$\begin{aligned} N^2 = \overline{1595}^2 &= \overline{1109}^2 + \frac{3}{2}\overline{936}^2 = \overline{571}^2 + \frac{3}{2}\overline{1216}^2 \\ &= \overline{1579}^2 + \frac{3}{2}\overline{184}^2 = \overline{1541}^2 + \frac{3}{2}\overline{336}^2, \end{aligned}$$

et les formules (2) donnent, pour les décompositions correspondantes de N,

$$\begin{aligned} N = 1595 &= 243 + 1352 \\ &= 512 + 1083 = 8 + 1587 = 1568 + 27, \end{aligned}$$

où les premiers termes, qui représentent respectivement les x^2, ne sont pas des carrés, tandis que les seconds ne sont pas les $\frac{3}{2}$ d'un carré parfait y^2. Mais on peut les écrire ainsi :

$$\begin{aligned} N = 1595 &= 3.9^2 + 2.26^2 = 2.16^2 + 3.19^2 \\ &= 2.2^2 + 3.23^2 = 2.28^2 + 3.3^2, \end{aligned}$$

et l'on voit qu'ils correspondent, non plus à une décomposition de N dans la forme $a^2 + \frac{3}{2} b^2$, semblable à celle obtenue pour N^2, mais à une décomposition dans la forme $2a^2 + 3b^2$, qui est aussi, dans ce cas, celle des facteurs premiers du nombre donné N.

VIII. La correspondance et la subordination mutuelles qui lient entre elles, chacune à chacune, les décompositions en sommes quadratiques $x^2 + ty^2$ d'un nombre N avec celles, de même forme $X^2 + tY^2$ et de dernière espèce, du carré N^2 de ce nombre, constituent, avec les formules (1)', un résultat nouveau dans la *Théorie des nombres*. Pour en indiquer d'un seul trait la portée, il me suffira de faire remarquer qu'il conduit, dans une catégorie nombreuse de cas, par une marche simple et sans autres recherches préliminaires que celle des facteurs premiers de N, à une solution nouvelle des deux problèmes dont il est question dans les n^{os} 180 et 205 des *Disquisitiones*, et qui forment deux des sujets principaux du célèbre Chapitre V de cet Ouvrage.

En effet, lorsqu'un nombre N, susceptible d'être représenté par une forme quadratique donnée $x^2 + ty^2$ [et il peut alors être représenté aussi par l'une des formes associées $p^2 + 2pq + cq^2$, $p^2 + pq + c'q^2$, dont les indéterminées p, q se déduisent immédiatement des premières x, y, et réciproquement, lorsque les constantes t, a, b, c' sont données], a été décomposé en ses facteurs premiers, transformés, s'il est nécessaire, en la forme quadratique $a^2 + tb^2$ (*), les formules (1)' donnent presque aussitôt toutes les décompositions $X^2 + t.Y^2$ du carré N^2 de ce nombre, après quoi la correspondance dont il s'agit fait remonter immédiatement aux décompositions ou représentations conjuguées de N, à l'aide des formules (2), dans lesquelles le nombre composant X doit entrer avec son signe. Enfin on passe de la représentation de N dans la forme $x^2 + ty^2$ à sa représentation dans la forme à trois termes $p^2 + 2pq + cq^2$ si t est de la forme $4n + 1$, et dans celle $p^2 + pq + c'q^2$ si t est de la forme $4n + 3$, en posant, dans le premier cas, $p = x - y$, $q = y$, $c = t + 1$, et, dans le second cas, $p = x - y$, $q = 2y$, $c' = \frac{t+1}{4}$. Les problèmes précités se trouvent ainsi résolus, dans les conditions que je viens de dire et pour toutes les valeurs de t, de la façon la plus directe et la plus simple.

IX. La correspondance des décompositions propres de N et de N^2 a un autre usage important, car elle fournit une méthode générale pour la résolution, en nombres entiers quand celle-ci est possible, en nombres rationnels dans tous les cas, du système des équations indéterminées

$$y = x^2 + tu^2, \quad y^2 = z^2 + tv^2,$$

avec les conditions $u = x + \alpha$, $v = z \pm \beta$.

En effet, puisque chacune des valeurs de y^2, qui appartiennent à l'espèce où les nombres z et $z \pm \beta$ sont

(*) Cette transformation s'opère, comme je l'ai dit page 422, à l'aide de facteurs entiers auxiliaires, choisis de façon que leur produit total A soit un carré parfait α^2.

premiers entre eux, dérive, par la formule des triangles rectangles, de la valeur correspondante de y, où x et u sont aussi premiers entre eux, on a d'abord

$$y^2 = (tu^2 - x^2)^2 + t.\overline{2xu}^2.$$

On en conclut, en remplaçant x par sa valeur $u - \alpha$,

$$y^2 = [tu^2 - (u-\alpha)^2]^2 + t.2u(u-\alpha)^2,$$

et, en égalant les deux expressions de y^2,

$$u^2(t-3) + 4\alpha u - \alpha^2 \pm \beta = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad u = \frac{1}{t-3}\left[-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + (t-3)(\alpha^2 \mp \beta)}\right],$$

relation dans laquelle, lorsque α et β auront été donnés, il faudra prendre pour t les seules valeurs qui rendent la quantité placée sous le radical égale à un carré parfait k^2. Cette condition se réduit, en écrivant

$$\alpha^2 \mp \beta = c \quad \text{et} \quad 4\alpha^2 - 3(\alpha^2 \mp \beta) = -a,$$

à $t = \dfrac{k^2 + a}{c}$, formule dont la solution en nombres entiers fait l'objet des §§ VII et VIII de la *Théorie des nombres* de Legendre (II^e Partie, n^{os} 185 et suivants de la deuxième édition).

Pour toutes les valeurs de t autres que celles ainsi obtenues, l'équation (3) ne donne, pour u et par suite pour x et y, que des valeurs incommensurables qui ne répondent pas à l'énoncé de la question.

X. Comme applications numériques, supposons d'abord $\alpha = \beta = 1$. Si l'on prend β avec le signe — sous le radical, la formule (3) devient $u = \dfrac{4}{3-t}$, en exéluant la valeur illusoire $u = 0$. Si l'on ne veut que des valeurs entières pour u, cette équation n'admet que les solutions

$$t = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,$$

auxquelles correspondent, respectivement, les valeurs

$$\begin{aligned} u &= 2,\ \ 4,\ -4,\ -2,\ -1,\\ x &= 1,\ \ 3,\ -5,\ -3,\ -2,\\ y &= 5,\ 41,\ \ 89,\ \ 29,\ \ 11. \end{aligned}$$

On a, en effet, $5 = 1^2 + 2^2$ et $5^2 = 3^2 + 4^2$. C'est la solution déjà obtenue dans l'article précité des *Nouvelles Annales*; puis

$$\begin{aligned} 41 &= 3^2 + 2.4^2 && \text{et} && \overline{41}^2 = \overline{23}^2 + 2.\overline{24}^2,\\ 89 &= (-5)^2 + 4\,(-4)^2 && \text{et} && \overline{89}^2 = \overline{39}^2 + 4.\overline{40}^2,\\ 29 &= (-3)^2 + 5\,(-2)^2 && \text{et} && \overline{39}^2 = \overline{11}^2 + 5.\overline{12}^2,\\ 11 &= (-2)^2 + 7\,(-1)^2 && \text{et} && \overline{11}^2 = \overline{3}^2 + 7.\overline{4}^2. \end{aligned}$$

Si l'on prend β avec le signe $+$ sous le radical, la formule (3) devient

$$(4)\qquad t = \frac{1}{t-3}\left[-2 \pm \sqrt{2(t-1)}\right],$$

et ne donne des valeurs commensurables de u que pour les valeurs de t,

$$t = 3,\quad 9,\quad 19,\quad 33,\quad 51,\quad 73,\quad 99,\quad \ldots,$$

d'où

$$u = 0,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \ldots,$$

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{7},\quad \frac{1}{8},\quad \ldots,$$

parmi lesquelles il ne se rencontre qu'une seule valeur entière de u, savoir $u = -1$, correspondante à $t = 9$, valeur à ajouter à celles déjà trouvées, de telle sorte qu'il n'existe, en résumé, que six valeurs de t, parmi l'infinité de celles qu'il peut recevoir, pour chacune desquelles le système des équations

$$y = x^2 + t(x+1)^2, \quad y^2 = z^2 + t(z \pm 1)^2$$

admette une solution en nombres entiers x, z et y, et ces valeurs de t sont $t = 1, 2, 4, 5, 7$ et 9. Il faut remarquer, en outre, que, dans chacun de ces cas, la solution est unique, comme je l'ai déjà fait voir dans l'article précité des *Nouvelles Annales* pour celui de $t = 1$, et par des motifs analogues. En effet, d'une part, la similitude des valeurs de y et de y^2 par rapport au multiplicateur t du second terme a cette conséquence, qu'une ou plusieurs solutions nouvelles de la question ne pourraient se rencontrer que parmi les décompositions de y^2 d'une espèce inférieure à la dernière (E_n) d'où provient celle déjà obtenue, tandis que, d'autre part, la seconde condition, savoir qu'il n'y ait entre z et v qu'une seule unité de différence, ne saurait se présenter dans aucune de ces décompositions ; car leur caractère commun consiste en ce que ces deux nombres ne sont plus premiers entre eux dans la valeur de y^2, qu'ils ont un facteur commun, et que par conséquent la différence entre u et v ne pourrait, comme cela est exigé ici, être égale a l'unité.

Ce résultat, digne de remarque, vient à l'appui de l'observation déjà signalée par M. Lucas, qu'une équation indéterminée du quatrième degré à trois inconnues (à laquelle peut se réduire le système ci-dessus), qui admet une solution en nombres entiers, n'en admet très-souvent pas d'autre, contrairement à ce qui a lieu pour l'équation du troisième degré, où une première solution en entraîne une infinité d'autres.

Si l'on admet les valeurs fractionnaires de u, la formule (4) en donne une infinité, correspondantes par paires aux valeurs admissibles de t.

Pour terminer, je donnerai une application de la formule (3) au cas où α est différent de β. Soit, par exemple,

$$\alpha = 3, \quad \beta = 5.$$

Les seules valeurs admissibles de t sont alors

$$t = 3,\ 10,\ 19,\ 30,\ 43,\ 58,\ 75,\ \ldots$$

si l'on prend β avec le signe — sous le radical; et

$$t = 3,\quad 5,\ 29,\ 35,\ \ldots$$

si l'on prend β avec le signe + sous le radical.

Les valeurs correspondantes et conjuguées de u sont, relativement à la première suite,

$$u = \frac{1}{3},\quad \frac{2}{7},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{9},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{11},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{2}{13},\quad \frac{1}{7},\quad \ldots,$$

et

$$u = \quad ,\ -2,\ -1,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{1}{4},\quad \ldots,$$

où se trouvent les seules valeurs entières $u = -2$ et $u = -1$.

Les valeurs de u, relatives à la seconde suite, sont,

$$u = \frac{7}{6},\quad 1,\quad \frac{14}{17},\quad \frac{1}{2},\quad \ldots,$$

$$u = \text{»}\ -7,\ -\frac{26}{17},\ -\frac{7}{8},\quad \ldots,$$

où l'on rencontre deux nouvelles valeurs entières de u, savoir $u = 1$, $u = -7$.

On vérifie, par exemple, que, pour $t = 10$, dans la première suite, et $u = -2$, on a

$$y = (-5)^2 + 10(-2)^2 = 65$$

et

$$y^2 = \overline{15}^2 + 10.\overline{20}^2 = \overline{65}^2,$$

où les conditions $x = u - 3$ et $u = z + 5$ sont observées.

Pour $t = 5$ et $u = -7$, dans la seconde suite, on a de même

$$y = (-10)^2 + 5.(-7)^2 = 345$$

et

$$y^2 = \overline{145}^3 + 5.\overline{140}^2 = \overline{345}^2,$$

où $x = u - 3$ et $v = z - 5$.

Dans cet exemple, comme dans plusieurs de ceux qui précèdent, on évite l'apparence des solutions négatives, en admettant que les conditions $u = x + \alpha$, $v = z + \beta$ signifient simplement que la différence entre x et u et entre z et v soit respectivement α et β en valeur absolue, sans impliquer que $u > x$, ni $v > z$. La dernière solution, par exemple, devient ainsi

$$y = 10^2 + 5.7^2, \quad y^2 = \overline{145}^3 + 5.\overline{140}^2.$$

Le sujet que je viens de traiter dans cette Étude comporte beaucoup d'autres développements, mais je dois me borner pour le moment à en avoir indiqué les traits caractéristiques.

NOTA. *Page* 424, *ligne* 9, *au lieu de* « les deux solutions », *lisez* « deux des quatre solutions. »