Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 39-48
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__39_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 34

(voir 1re série, t. I, p. 39.)

Si, d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique de même degré m.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point du lieu, n le nombre des plans fixes, x, y, z les coordonnées du pied de l'une des perpendiculaires abaissées sur l'un des plans dont l'équation est en coordonnées rectangulaires

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

X, Y, Z les coordonnées du point de la surface

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$

d'où sont issues toutes ces perpendiculaires; on a

$$n\xi = \Sigma x, \quad n\eta = \Sigma y, \quad n\zeta = \Sigma z.$$

Les coordonnées x, y, z vérifient d'abord l'équation du plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

puis celle de la perpendiculaire

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos\beta} = \frac{Z - z}{\cos\gamma};$$

en sorte que, de ces trois équations, l'on tire

$$x = X - P\cos\alpha, \quad y = Y - P\cos\beta, \quad z = Z - P\cos\gamma,$$

en posant, pour abréger,

$$P = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma - p.$$

Ajoutons les équations analogues relatives aux différents plans, nous aurons

$$\begin{aligned} n\xi &= \Sigma x = nX - \Sigma P\cos\alpha, \\ n\eta &= \Sigma y = nY - \Sigma P\cos\beta, \\ n\zeta &= \Sigma z = nZ - \Sigma P\cos\gamma. \end{aligned}$$

De ces équations on tire X, Y, Z exprimés linéairement en ξ, η, ζ et, en portant dans l'équation

$$f(X, Y, Z) = 0$$

de degré m, on obtient une équation de même degré en ξ, η, ζ, qui est l'équation du lieu. Ch. B.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

Question 1099

(voir 2e série, t. XI, p. 480, et t. XII, p. 500);

Par M. MORET-BLANC.

Sur chacun des côtés d'un quadrilatère circonscriptible on construit deux triangles isoscèles semblables. Soient α, β, γ, δ les points de rencontre des hauteurs *des triangles extérieurs;* α', β', γ', δ' *ceux des hauteurs des triangles intérieurs.*

1° *Les médianes des deux quadrilatères* $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ *se coupent en un même point qui est leur milieu.*

2° *Les médianes du quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *se coupent à angle droit.*

3° *Dans le cas du triangle, un des sommets du quadrilatère donné devient le point de contact de l'un des côtés du triangle avec le cercle inscrit. Les deux propriétés précédentes subsistent.*

On demande quand les trois conditions sont remplies. (H. Brocard.)

1° Soit G le point de concours des médianes du quadrilatère donné, situé au milieu de chacune d'elles, et centre de gravité de quatre masses égales placées aux quatre sommets du quadrilatère. La somme algébrique des projections des quatre demi-médianes sur un axe quelconque passant par G est égale à zéro. Les droites qui joignent les extrémités de ces médianes respectivement aux points α, β, γ, δ ou α', β', γ', δ' peuvent être regardées comme représentant des forces égales appliquées aux milieux des côtés du quadrilatère donné, perpendiculaires et proportionnelles à ces côtés, dirigées toutes vers l'extérieur ou vers l'intérieur; on sait que ces forces se font équilibre, et par conséquent la somme de leurs projections sur un axe quelconque passant par G est identiquement nulle; il en est donc de même de la somme des projections des droites qui joignent le point G soit aux sommets du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, soit à ceux du quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Donc ce point est le centre de gravité de quatre masses égales placées aux sommets de l'un quelconque de ces deux quadrilatères, et, par suite, il est le point de concours des médianes de chacun d'eux et le milieu de chacune d'elles.

Cette première partie du théorème a donc toujours lieu (*).

2° Pour que les médianes du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se coupent à angle droit, il faut et il suffit que les diagonales $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ soient égales, car alors les médianes sont les diagonales d'un losange.

Le carré d'une droite est égal à la somme des carrés de ses projections sur deux axes rectangulaires.

Supposons que α, β, γ, δ soient les points de concours des hauteurs des triangles isoscèles construits respectivement sur $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et que 2ω soit l'angle au sommet des triangles isoscèles.

En projetant $\alpha\gamma$ sur AD et sur une perpendiculaire à AD, puis sur BC et sur une perpendiculaire à BC, et ajoutant les résultats pour plus de symétrie, on a

$$\begin{aligned}
2\,\overline{\alpha\gamma}^2 &= a^2 + b^2 + \frac{a^2 - c^2}{2\cos^2\omega} \\
&+ \frac{2ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\cos\frac{A-B+C-D}{2}}{2\cos^2\omega} \\
&- \frac{ad\cos(A+\omega)}{\cos\omega} - \frac{ab\cos(B-\omega)}{\cos\omega} \\
&- \frac{bc\cos(C-\omega)}{\cos\omega} - \frac{cd\cos(D+\omega)}{\cos\omega}.
\end{aligned}$$

On trouve de même, en projetant $\beta\delta$ sur AB et sur une perpendiculaire à AB, puis sur CD et sur une per-

(*) M. Pellissier fait également remarquer que cette proposition a lieu pour un quadrilatère quelconque.

pendiculaire à CD,

$$
\begin{aligned}
2\overline{\beta\delta} = a^2 + c^2 &+ \frac{b^2+d^2}{2\cos^2\omega} \\
&+ \frac{2bd\cos\frac{B+C-D-A}{2}\cos\frac{A-B+C-D}{2}}{2\cos^2\omega} \\
&- \frac{ad\cos(A+\omega)}{\cos\omega} - \frac{ab\cos(B+\omega)}{\cos\omega} \\
&- \frac{bc\cos(C+\omega)}{\cos\omega} - \frac{cd\cos(D+\omega)}{\cos\omega}.
\end{aligned}
$$

Égalant ces deux valeurs et multipliant par $2\cos^2\omega$, il vient

$$
\begin{aligned}
&(2\cos^2\omega - 1)(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \\
&\quad = 2\cos\frac{A-B+C-D}{2} \\
&\qquad \times \left(bd\cos\frac{B+C-D-A}{2} - ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Or

$$2\cos^2\omega - 1 = \cos 2\omega,$$

et, le quadrilatère ABCD étant circonscriptible,

$$b + d = a + c,$$

d'où

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2(ac - bd);$$

la relation précédente peut donc s'écrire

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos 2\omega(ac - bd) \\
&\quad = \cos\frac{A-B+C-D}{2} \\
&\qquad \times \left(bd\cos\frac{B+C-D-A}{2} - ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

d'où

$$\cos 2\omega = \frac{\cos\frac{A-B+C-D}{2}\left(bd\cos\frac{B+C-D-A}{2} - ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\right)}{ac-bd}.$$

Tel doit être l'angle au sommet des triangles isoscèles pour que la deuxième condition soit remplie.

La relation (1) est satisfaite, quel que soit 2ω, lorsque le quadrilatère donné est un losange.

Si $A = C$, la relation précédente se réduit à

$$\cos 2\omega = -\cos\frac{A-B+C-D}{2}\cos\frac{B-D}{2}.$$

Pour le quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, il faut changer le signe de ω, ce qui ne produit aucun changement dans la formule définitive.

3° Dans le cas d'un triangle ABC circonscrit à un cercle, le sommet D devient le point de contact du côté AC; tous les raisonnements précédents subsistent en faisant $D = 2$ droits. La formule (1) devient

$$\cos 2\omega = \frac{\sin\frac{A-B-C}{2}\left(bd\sin\frac{B+C-A}{2} - ac\sin\frac{A+B-C}{2}\right)}{ac-bd},$$

c et d étant les deux segments du côté AC.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\cos 2\omega = -\sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}.$$

Questions 1218 *et* 1219

(voir 2e série, t. XVI, p. 48);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'artillerie, à Calais.

1218. *Pour tout nombre impair p, on peut poser*

$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, dont trois ont une somme algébrique égale à un carré.* (S. REALIS.)

Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux ; on a donc

$$p = x^2 + y^2 + 2z^2,$$

et l'on obtient la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 = (x+z)(x-z) + (x+z)(z+y) \\ + (x+z)(z-y) + (y^2 + z^2 - 2xz), \end{aligned}$$

qui satisfait aux conditions imposées.

1219. *Pour tout nombre entier p, de l'une des formes*

$$4n+1, \quad 4n+2, \quad 8n+3,$$

on peut poser

$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, tels que la somme algébrique*

$$P + Q + R + 3S$$

soit égale à un carré. (S. RÉALIS.)

Tout nombre de l'une des formes $4n+1$, $4n+2$,

$8n+3$ est la somme de trois carrés; on a donc

$$p = x^2 + y^2 + z^2,$$

et l'on obtient la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 - zy) + (y^2 - xz) \\ + (z^2 - xy) + (xy + xz + yz),\end{aligned}$$

qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Question 1230

(voir 2e série, t. XVI, p. 239),

Par M. BERTHOMIEU,

Élève du lycée de Bordeaux.

Soient O *un point fixe dans le plan du cercle* PQR, *et* OPQ *une sécante sur laquelle on prend un point* S, *de manière que* $OS = \lambda OP + \mu OQ$ (λ *et* μ *étant des constantes*); *démontrer que l'enveloppe d'une perpendiculaire à* PQ, *menée par le point* S, *est une conique.*

(R.-W. Genese.)

Soient C le centre du cercle, a son rayon, et $OC = c$.

Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le point O, et pour axe des x la droite OC; le cercle sera alors représenté par l'équation

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2,$$

et la droite OS par

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} = \rho,$$

en sorte que OP et OQ sont racines de l'équation

$$\rho^2 - 2c\rho\cos\alpha + c^2 - a^2 = 0;$$

on a donc

$$\mathrm{OP} = c\cos\alpha + \sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha},$$
$$\mathrm{OQ} = c\cos\alpha - \sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\mathrm{OS} &= \lambda\,\mathrm{OP} + \mu\,\mathrm{OQ}\\ &= c(\lambda + \mu)\cos\alpha + (\lambda - \mu)\sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha},\end{aligned}$$

la perpendiculaire à PQ, menée par le point S, a, par conséquent, pour équation

$$\begin{aligned}&[x - c(\lambda + \mu)]\cos\alpha + y\sin\alpha\\ &\quad = (\lambda - \mu)\sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha}.\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit qu'elle est constamment tangente à la conique

$$\frac{[x - c(\lambda + \mu)]^2}{a^2(\lambda - \mu)^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)(\lambda - \mu)^2} = 1,$$

ce qui démontre la proposition.

Si $a > c$, c'est-à-dire si le point O est intérieur au cercle PQR, l'enveloppe est une ellipse; si $a < c$, c'est-à-dire si le point O est extérieur au cercle, l'enveloppe est une hyperbole.

Dans le cas particulier où $\mu = 0$ et $\lambda = 1$, l'enveloppe a pour équation

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

ce qui démontre cette proposition connue :

Si, par un point O, on mène des rayons vecteurs à un cercle C, l'enveloppe des perpendiculaires élevées à ces rayons par leurs extrémités est une conique qui a le point O pour foyer et le cercle C pour cercle principal.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Picat, élève du lycée de Grenoble; A. Muffat. élève du lycée de Lyon; Barthe, élève du lycée de Bordeaux; H. Dessoudeix, elève du lycée de Bordeaux; G. Lambiotte, élève de l'École des Mines de Liege; E. Paturet; H. Lez; B. Launoy; E. Ambert, maître repétiteur au lycée de Montpellier; P. Cassani, professeur à l'Institut technique de Venise; P. Sondat; B. Robaglia; M. Couette; Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. MORET-BLANC.

Soit A un point quelconque du plan. Abaissons sur OPQ la perpendiculaire AV et joignons AS. Pour chaque position de la sécante, on a un rayon AV et un rayon AS; ces rayons, qui se correspondent un à un, forment deux faisceaux homographiques, dont les deux rayons doubles sont les tangentes qu'on peut mener du point A à l'enveloppe. Cette enveloppe est donc une courbe de seconde classe et par conséquent une conique.

Si le point O est intérieur au cercle, la conique a des tangentes parallèles à toutes les directions : c'est une ellipse. Si le point O est au centre du cercle, les tangentes à l'enveloppe sont équidistantes du centre : l'enveloppe est un cercle concentrique au premier.

Si le point O est extérieur au cercle, les tangentes à l'enveloppe sont perpendiculaires aux droites menées du point O dans l'angle TOT′ des tangentes au cercle : cette enveloppe est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites OT, OT′.

Si le point O est sur la circonférence, ou si $\lambda = \mu$, le lieu du point S est une circonférence passant par O; l'enveloppe est le point de cette circonférence diamétralement opposé au point O.

Note. — M. Laisant a résolu la question par la méthode des équipollences.