NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 385-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__385_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[suite (*).]

SUR LES PÉRIODES ÉLÉMENTAIRES.

Soit $f(z)$ une fonction doublement périodique. Considérons les points M_{00} et M_{10} qui représentent les imaginaires z_0 et $z_0 + \omega$, ω désignant une période de $f(z)$. On peut toujours supposer que ω soit la plus petite période d'argument égal à l'argument de ω; car il n'existe pas deux périodes distinctes de même argument; toutes sont multiples de l'une d'elles, que l'on peut appeler ω. Soit ϖ une période distincte de ω, et supposons-la aussi la plus petite de celles qui possèdent son argument. Soit M_{01} le point qui représente l'imaginaire $z_0 + \varpi$; sur les droites $M_{00}M_{10}$ et $M_{00}M_{01}$, on peut construire un parallélogramme que l'on pourra considérer comme un parallélogramme des périodes; on lui donne le nom de parallélogramme *élémentaire*, si aucun des points de son aire joints à M_{00} ne fournit une nouvelle période.

Il est clair que le parallélogramme élémentaire peut se former en prenant la période ω pour base et en faisant mouvoir le côté $M_{00}M_{10}$, pris pour base, parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il rencontre un point M_{01}, tel que $M_{00}M_{01}$ soit une période.

Soient ω et ϖ deux périodes élémentaires; ω' et ϖ' deux

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 247.

nouvelles périodes; il faudra nécessairement que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega' = m\omega + n\varpi, \\ \varpi' = m'\omega + n'\varpi, \end{cases}$$

m et n, m' et n' désignant des entiers; car une période quelconque s'obtiendra en joignant le point M_{00} à l'un des points de croisement M_{mn} des droites formant le réseau des parallélogrammes des périodes ω, ϖ. Pour que les périodes ω', ϖ' puissent former un nouveau parallélogramme élémentaire, il faut que m et n soient premiers entre eux, ainsi que m' et n'. En effet, si m et n avaient le diviseur commun δ, en posant $m = \delta m''$, $n = \delta n''$, on aurait

$$\omega' = \delta(m''\omega + n''\varpi),$$

et $\dfrac{\omega'}{\delta}$ serait une période; ω' ne saurait donc être une période élémentaire; mait ω et ϖ doivent s'exprimer en ω' et ϖ' sous les formes

$$\omega = \mu\omega' + \nu\varpi',$$
$$\varpi = \mu'\omega' + \nu'\varpi',$$

ce qui exige que le déterminant du système (1) divise $n\varpi' - n'\omega'$ et $m\varpi' - m'\omega'$, c'est-à-dire n, n', m et m'. Or, m et n étant premiers entre eux, le déterminant est égal à l'unité, et l'on a

$$mn' - nm' = \pm 1.$$

Soit

$$\omega = a + b\sqrt{-1},$$
$$\varpi = a' + b'\sqrt{-1},$$
$$\omega' = ma + na' + \sqrt{-1}(mb + nb'),$$
$$\varpi' = m'a + n'a' + \sqrt{-1}(m'b + n'b'),$$

l'aire du second parallélogramme des périodes est

$$(ma + na')(m'b' + n'b') - (m'a + n'a')(ma + nb')$$

ou

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Donc :

Les aires des parallélogrammes élémentaires sont égales.

SUR LA FORME GÉNÉRALE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES, ET LEUR EXPRESSION EN FONCTION DE L'UNE D'ELLES.

THÉORÈME I. — *Il existe toujours une fonction doublement périodique admettant deux périodes données, deux zéros donnés et deux infinis donnés, pourvu que la somme des zéros soit égale à la somme des infinis à des multiples des périodes près.*

En effet, nous avons vu qu'il existait deux fonctions distinctes φ_1 et φ_2 satisfaisant aux formules

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x),$$
$$\varphi(x+\varpi) = \varphi(x)\, e^{\frac{-\pi\sqrt{-1}}{\omega}2(x+c)},$$

et que la solution la plus générale de ces équations était

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 = \varphi.$$

Ces fonctions φ_1 et φ_2 ont chacune deux zéros dans le parallélogramme des périodes ω et ϖ, ainsi que la fonction φ. Si nous divisons φ_1 par φ_2 ou si nous divisons $A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$ par $B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2$, B_1 et B_2 désignant des constantes différentes de A_1 et A_2, nous obtiendrons une fonction doublement périodique $f(x)$. Soient a, b ses zéros, α et β ses infinis; considérons l'expression

$$(1)\qquad A\frac{f(x+s) - f(a'+s)}{f(x+s) - f(\alpha'+s)};$$

elle n'est plus infinie pour $x = \alpha$ ou $x = \beta$, mais elle l'est quand on pose $x = \alpha'$; elle admet en outre le zéro a'. Mais la fonction $f(x+s) - f(\alpha'+s)$, outre le zéro $x = \alpha'$, en possède un autre β', tout en conservant les infinis $x = \alpha - s$, $x = \beta - s$. On doit donc avoir, en observant que la somme des zéros est égale à celle des infinis,

$$\alpha' + \beta' \equiv \alpha - s + \beta - s \quad (*),$$

équation dans laquelle on peut choisir s, de telle sorte que β' ait une valeur donnée. L'expression (1) admettra alors deux infinis donnés α', β', le zéro donné a' et par suite un autre zéro b', tel que $\alpha' + \beta' \equiv a' + b'$; enfin le coefficient A permettra de prendre la fonction (1) égale à une quantité donnée différente de zéro pour une valeur donnée de x.

Théorème II. — *Il existe une fonction possédant les périodes ω et ϖ, les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfaisant à la relation*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

En effet, soit $F_1(x)$ une fonction aux périodes ω, ϖ, admettant les zéros a_1 et b_1 et les infinis α_1 et α_2, b_1 étant déterminé par la formule

$$a_1 + b_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2.$$

Soit $F_2(x)$ une fonction aux mêmes périodes ayant pour zéros a_2 et b_2 et pour infinis α_3 et b_1, ... Soit $F_{n-1}(x)$ une fonction aux mêmes périodes admettant les zéros a_{n-1} et b_{n-1} et les infinis b_{n-2} et α_n, tels que

$$a_{n-1} + b_{n-1} \equiv \alpha_n + b_{n-2}.$$

(*) Le signe $\equiv$ est employé à la place de $=$ pour indiquer que l'on néglige des multiples des périodes.

La fonction

$$F_1(x)\,F_2(x)\,\ldots\,F_{n-1}(x)$$

aura les périodes ω, ϖ, les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$ et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; mais on aura

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b_{n-1} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

Théorème III. — *Deux fonctions doublement périodiques d'ordre fini dont les périodes ω et ϖ, ω' et ϖ' satisfont aux relations*

$$\Omega = m\omega = m'\omega',$$
$$\Pi = n\varpi = n'\varpi',$$

m et m' désignant des nombres entiers; en d'autres termes, deux fonctions u, v, dont les parallélogrammes élémentaires ont leurs côtés commensurables et dirigés dans le même sens, sont fonctions algébriques l'une de l'autre.

En effet, soient μ l'ordre de u, et ν l'ordre de v. Le parallélogramme de u, comme celui de v, tiendra un nombre exact de fois dans le parallélogramme ayant pour côtés Ω et Π, le premier $mn = M$ fois, le second $m'n' = N$ fois. Il en résulte que, à chaque valeur de u, correspondront, dans le parallélogramme Ω, Π, un nombre $M\mu$ de valeurs de la variable z, et par suite $M\mu$ valeurs de v; donc v est lié à u par une équation algébrique de degré $M\mu$ en v. On verrait de même qu'elle est de degré $N\nu$ en u; car u et v n'ont que des nombres limités de zéros et d'infinis et restent d'ailleurs monogènes et continues l'une par rapport à l'autre.

Théorème IV. — *Une fonction d'ordre n est liée à sa dérivée par une équation du degré n, par rapport à sa dérivée, et de degré $2n$ par rapport à la fonction.*

En effet, soit u une fonction aux périodes ω et ϖ; sa dérivée admet les mêmes périodes, mais les infinis de la dérivée sont en général en nombre double de celui de la fonction; car chaque infini de la fonction, lorsqu'il est simple, devient double dans la dérivée; en tout cas, l'ordre de la dérivée sera compris entre $n+1$ et $2n$. En vertu du théorème précédent, il existera entre u et u' une relation algébrique d'ordre n en u' et d'ordre n' en u, $n+1 \leq n' \leq 2n$, u' n'étant infini que si u est infini; le coefficient de u'^n pourra être pris égal à l'unité. A une même valeur de u correspondent n valeurs de z dont la somme est constante, et par suite n valeurs de $\frac{dz}{du} = \frac{1}{u'}$, dont la somme est nulle; donc le coefficient de u' est nul.

Par exemple, si u est du second ordre et a deux infinis distincts, on aura

$$u'^2 + \mathrm{U} = 0,$$

U désignant un polynôme du quatrième degré. Si u a un infini double, U sera seulement du troisième degré. Ce dernier théorème est de M. Méray.

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS A DEUX PÉRIODES EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

Soient $\mathrm{F}(x)$ une fonction aux périodes ω et ϖ et α_1, α_2, α_3, ... ses infinis. Soit $\theta(x)$ une fonction auxiliaire satisfaisant aux relations

$$\theta(x+\omega) = \theta(x),$$

$$\theta(x+\varpi) = \theta(x)\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)};$$

on aura

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

$$\frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\,\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}\,dz,$$

prise le long d'un parallélogramme des périodes. Le long des côtés parallèles à ϖ, les valeurs de l'intégrale se détruiront, et il restera à intégrer le long des deux autres côtés, ce qui donnera, en appelant p une arbitraire,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_p^{p+\omega} F(z)\,\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\,\mu\,dz,$$

résultat indépendant de μ et de p, que nous désignerons par C. Or, l'intégrale considérée est aussi égale à la somme des résidus de $F(z)\,\dfrac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$. Les résidus relatifs à $\theta(z-x)$ sont, en appelant $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les zéros de $\theta(z)$,

$$F(x+a_1),\quad F(x+a_2),\quad \ldots,\quad F(x+a_\mu);$$

ceux relatifs à $F(z)$ sont

$$A_1\,\frac{\theta'(\alpha_1-x)}{\theta(\alpha_1-x)},\quad A_2\,\frac{\theta'(\alpha_2-x)}{\theta(\alpha_2-x)},\quad \ldots,$$

si les infinis α sont simples, et l'on a

$$A_i = \lim(x-\alpha)\,F(x)\quad \text{pour}\quad x=\alpha.$$

En général, si l'on pose

$$(z-\alpha)^m F(z) = \varphi(z),$$

on aura, pour résidu de $F(z)\,\dfrac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$,

$$\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\,\frac{1}{(m-1)!}\left[\varphi(\alpha)\,\frac{\theta'(\alpha-x)}{\theta(\alpha-x)}\right].$$

En résumé, on aura

$$C = \Sigma F(x+a) + \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha)\right].$$

Supposons $\mu = 1$ et $a = 0$; on aura, au lieu de cette formule,

$$C = F(x) + \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha)\right],$$

et $F(x)$ se trouve décomposé ainsi :

$$F(x) = C - \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha)\right].$$

Cette formule donne $F(x)$ décomposée en éléments simples, tous intégrables au moyen de la fonction θ, ce qui démontre la possibilité d'intégrer les fonctions à deux périodes (du moins à l'aide des fonctions auxiliaires); mais le mode de décomposition dont il vient d'être question présente encore une foule d'autres applications que M. Hermite, auquel nous devons la théorie que nous venons d'exposer, a fait connaître.

Nous allons montrer immédiatement comment les intégrales de deuxième et de troisième espèce se ramènent par les considérations précédentes aux fonctions Θ et H de Jacobi.

La fonction de seconde espèce

$$\int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

quand on y fait $z = \operatorname{sn} x$, devient, à un facteur constant k^2 près,

$$\int k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx.$$

C'est cette intégrale que nous allons étudier. L'intégrale de troisième espèce

$$\int \frac{dz}{(1-n^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

devient, pour $z = \mathrm{sn}\, x$,

$$(a) \qquad \int \frac{dx}{1 - n^2 \mathrm{sn}^2 x};$$

nous la remplacerons par

$$\int \frac{k^2 \mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 x}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 x},$$

en posant $n^2 = k^2 \mathrm{sn}^2 a$ et en observant que l'intégrale (a) ne diffère de celle-ci que par une fonction linéaire de x et par un facteur constant.

ÉTUDE DE LA FONCTION $Z(x)$.

La fonction

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \mathrm{sn}^2 x \, dx$$

est évidemment monodrome, car les résidus de $\mathrm{sn}^2 x$ sont nuls; nous allons le vérifier.

Décomposons, par la méthode de M. Hermite, $\mathrm{sn}^2 x$ en éléments simples, cette fonction ayant pour périodes $2K$ [puisque $\mathrm{sn}(x + 2K) = -\mathrm{sn}\, x$] et $2K'\sqrt{-1}$. Évaluons l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \mathrm{sn}^2 z \, \frac{H'(z-x)}{H(z-x)} \, dz$$

le long d'un parallélogramme de côtés $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$; le long des côtés verticaux, le résultat de l'intégration est nul; le long des côtés horizontaux, le résultat est

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\alpha^{\alpha + 2K} \mathrm{sn}^2 z$$
$$\times \left[\frac{H'(z-x)}{H(z-x)} - \frac{H'(z - x + 2K'\sqrt{-1})}{H(z - x + 2K'\sqrt{-1})}\right] dz.$$

En vertu de la formule

$$H(x+2K'\sqrt{-1}) = -H(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})},$$

l'intégrale considérée se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+2K} \operatorname{sn}^2 z\,\frac{1}{K}\,dz = \frac{1}{2K}\int_0^{2K} \operatorname{sn}^2 z\,dz;$$

nous désignerons cette quantité par C. Mais l'intégrale (1) est aussi égale à la somme des résidus de la fonction placée sous le signe $\int$; le résidu relatif au point x est $\operatorname{sn}^2 x$; calculons celui qui est relatif au point $K'\sqrt{-1}$. Posons pour cela $z = K'\sqrt{-1}+h$; nous aurons

$$\operatorname{sn}^2(K'\sqrt{-1}+h)\frac{H'(K'\sqrt{-1}-x+h)}{H(K'\sqrt{-1}-x+h)}$$

$$= \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 h}\left\{\frac{H'(K'\sqrt{-1}-x)}{H(K\sqrt{-1}-x)} + h\left[\frac{H'(K'\sqrt{-1}-x)}{H(K'\sqrt{-1}-x)}\right]'\right\},$$

et par suite le coefficient de $\frac{1}{h}$ ou le résidu cherché est

$$\frac{1}{k^2}\left[\frac{H'(K'\sqrt{-1}-x)}{H(K\sqrt{-1}-x)}\right]'.$$

Si l'on observe que

$$H(-x+K'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\Theta(-x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(-2x+K'\sqrt{-1})},$$

on a

$$-\frac{H'(K\sqrt{-1}-x)}{H(K\sqrt{-1}-x)} = -\frac{\Theta'(-x)}{\Theta(-x)} + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}.$$

Notre résidu devient

$$-\frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(-x)}{\Theta(-x)}\right]' = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]'.$$

On a donc enfin

$$C = \mathrm{sn}^2 x + \frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]',$$

ou, en intégrant, en multipliant par k^2 et en posant $Ck^2 = \zeta$,

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

telle est l'expression de $Z(x)$, monodrome comme l'on voit. On en déduit

$$(2) \qquad \int_0^x Z(x)\,dx = \zeta\frac{x^2}{2} - \log\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)},$$

et l'on constate que la fonction

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}$$

est monodrome également. M. Weierstrass la désigne par le symbole $\mathrm{Al}\,x$. Il désigne par $\mathrm{Al}_1 x$, $\mathrm{Al}_2 x$, $\mathrm{Al}_3 x$ les produits de $\mathrm{Al}\,x$ par $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$.

La constante ζ est susceptible de prendre une forme remarquable. En effet, en différentiant (1), on a

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et, en différentiant encore,

$$\mathrm{sn}^2 x = \zeta - \frac{\Theta''(x)\,\Theta(x) - \Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Si l'on fait alors $x = 0$, on a

$$0 = \zeta - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

ou enfin

$$\zeta = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

On a ainsi plusieurs expressions de la constante ζ, que l'on peut considérer comme parfaitement connue.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE TROISIÈME ESPÈCE.

On peut parfois éviter la méthode de décomposition donnée plus haut. En voici un exemple :

La formule [14] donne

$$\Theta(x+a)\,\Theta(x-a) = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}\,\Theta^2(x) - \frac{\mathrm{H}^2(a)}{\Theta^2(0)}\,\mathrm{H}^2(x);$$

on peut l'écrire

$$\Theta(x+a)\,\Theta(x-a) = \frac{\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}\,(1 - k^2\operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a).$$

On en déduit immédiatement

$$1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x-a)}{\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à a, on trouve (en observant que $\operatorname{sn}' a = \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a$),

$$\frac{-2k^2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Si l'on change les signes et que l'on intègre de zéro à x, on trouve

$$\int_0^x \frac{k^2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\,dx = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Cette intégrale n'est pas tout à fait l'intégrale de troisième espèce de Legendre, mais il est clair qu'elle s'y ramène aisément. Jacobi la désigne par $\Pi(x, a)$. Ainsi l'on a

$$(1)\qquad \Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

On en conclut, en changeant x en a et a en x, puis en retranchant,

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - a\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On peut d'ailleurs s'assurer que les valeurs des logarithmes se sont détruites, en observant que l'on doit avoir une identité pour $x = 0$, $a = 0$.

C'est dans l'égalité précédente que consiste *l'échange du paramètre et de l'argument*, proposition généralisée dans la théorie des fonctions abéliennes. On peut aussi l'écrire

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\mathrm{Z}(a) - a\mathrm{Z}(x).$$

EXPRESSION D'UNE FONCTION DOUBLEMENT PÉRIODIQUE AU MOYEN D'UNE FONCTION DU SECOND ORDRE AUX MÊMES PÉRIODES. — THÉORÈME DE M. LIOUVILLE.

Soit $f(x)$ une fonction monodrome et monogène du second ordre aux périodes ω et ϖ; soient α et $s - \alpha$ ses infinis, s désignant la quantité constante à laquelle se réduit la somme des valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ prend une valeur donnée dans un même parallélogramme. Soit $\mathrm{F}(z)$ une fonction quelconque aux mêmes périodes ω, ϖ; soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ses infinis. La fonction $\frac{\mathrm{F}(z)}{f(z) - f(x)}$ intégrée le long d'un parallélogramme des périodes donne un résultat nul : la somme de ses résidus est donc nulle.

La somme des résidus relatifs aux infinis x et $s - x$ de $\frac{1}{f(z) - f(x)}$ est

$$\mathrm{F}(x)\frac{1}{f'(x)} + \mathrm{F}(s - x)\frac{1}{f'(s - x)},$$

ou bien

$$\frac{F(x) - F(s-x)}{f'(x)},$$

en observant que, $f(x)$ étant égal à $f(s-x)$, $f'(x)$ doit être égal et de signe contraire à $f'(s-x)$. La somme des résidus relatifs à $F(x)$ étant alors représentée par

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)\,dz}{f(z)-f(x)},$$

on aura

$$(1)\quad F(x) - F(s-x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f'(x) \int_F \frac{F(z)\,dz}{f(x)-f(z)},$$

le signe F placé au-dessous du signe $\int$ indiquant qu'on ne doit intégrer qu'autour des infinis de $F(z)$.

Si l'on considère en second lieu la fonction

$$\frac{F(z)f'(z)}{f(z)-f(x)},$$

son intégrale prise le long d'un parallélogramme sera encore nulle, et il en sera de même de la somme de ses résidus. Or la somme des résidus relatifs à $\frac{f'(z)}{f(z)-f(x)}$ est égale à

$$F(x) + F(s-x) - F(\alpha) - F(s-\alpha),$$

et l'on a par suite

$$F(x) + F(s-x) - F(\alpha) - F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)f'(z)}{f(z)-f(x)}\,dz = 0,$$

ou bien

$$F(x) + F(s-x) = F(\alpha) + F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)f'(z)}{f(x)-f(z)}\,dz.$$

La comparaison de cette formule avec (1) donne

$$2F(x) = F(\alpha) + F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_F \frac{F(z)[f'(x)+f'(z)]}{f(z)-f(x)}\, dz,$$

ou bien encore

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 2F(x) &= F(\alpha) + F(s-\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{(\mu-1)!} \sum \frac{d^{\mu-1}}{d\beta^{\mu-1}} \left[\theta(\beta) \frac{f'(x)+f'(\beta)}{f(x)-f(\beta)} \right], \end{aligned} \right.$$

en posant $F(z) = (z-\beta)^\mu \theta(z)$, μ désignant le degré de multiplicité de l'infini β. Quand $\mu = 1$, le symbole $\frac{1}{(\mu-1)!} \sum \frac{d^{\mu-1}}{d\beta^{\mu-1}}$ doit être supprimé.

La formule (2) montre que *toute fonction aux périodes ω, ϖ peut s'exprimer rationnellement au moyen de la fonction du second ordre f et de sa dérivée.*

On voit, en outre, que cette dérivée n'entrera que sous forme linéaire.

Ce théorème est dû à M. Liouville, mais l'expression (2) explicite de F, que nous venons de donner, n'est, je crois, pas encore connue ; du moins on ne la trouve pas dans le Traité de MM. Briot et Bouquet.

Remarque. — La théorie précédente tomberait en défaut si $F(x)$ et $f(x)$ avaient des infinis communs, mais on tournerait facilement la difficulté en développant $F(x)$ divisé par une puissance convenablement choisie de $f(x)$.

APPLICATION DES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES AU PROBLÈME DIT DE LA MULTIPLICATION.

Le problème de la multiplication des fonctions elliptiques a pour but de faire connaître $\operatorname{sn} mx$, $\operatorname{cn} mx$,

$\mathrm{dn}\,mx$ en fonction de $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$. Notre formule (2) du paragraphe précédent résout cette question plus simplement et plus complétement qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.

Soient k le module de $\mathrm{sn}\,x$, $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ ses périodes, m un nombre entier : $\mathrm{sn}\,m(x-a)$ admet évidemment les mêmes périodes. Construisons le parallélogramme des périodes, de telle sorte que ses côtés coïncident avec l'axe des x et l'axe des y positifs, puis déplaçons infiniment peu ce parallélogramme, en plaçant le sommet primitivement à l'origine, dans l'angle des coordonnées négatives.

Les infinis de $\mathrm{sn}\,x$ sont $K'\sqrt{-1}$ et $2K+K'\sqrt{-1}$, ceux de $\mathrm{sn}\,m(x-a)$ sont

$$\beta' = a + (2i+1)\frac{K'\sqrt{-1}}{m} + (2j+1)\frac{K}{m},$$

$$\beta'' = a + (2i+1)\frac{K'\sqrt{-1}}{m} + 2j\frac{2K}{m},$$

i et j variant de zéro à $m-1$. En faisant $s=2K$, la formule (2) du paragraphe précédent donne

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2\,\mathrm{sn}\,m(x-a) &= \mathrm{sn}\,m'K'\sqrt{-1}-a) \\ &\quad + \mathrm{sn}\,m(K'\sqrt{-1}+2K-a) \\ &\quad + \Sigma\,\text{résidu}.\,\mathrm{sn}\,m(z-a)\frac{\mathrm{sn}'x+\mathrm{sn}'z}{\mathrm{sn}\,x-\mathrm{sn}\,z}. \end{aligned}\right.$$

Le résidu relatif à un infini β' s'obtiendra en cherchant la limite de

$$\begin{aligned} &z\,\mathrm{sn}\,m(\beta'-a+z)\frac{\mathrm{sn}'x+\mathrm{sn}'\beta'}{\mathrm{sn}\,x-\mathrm{sn}\,\beta'} \\ &= z\,\mathrm{sn}\left[(2i+1)K'\sqrt{-1}+(2j+1)2K+mz\right]\frac{\mathrm{sn}'x+\mathrm{sn}'\beta'}{\mathrm{sn}\,x-\mathrm{sn}\,\beta} \\ &= z\,\frac{-1}{k\,\mathrm{sn}\,mz}\,\frac{\mathrm{sn}'x+\mathrm{sn}'\beta'}{\mathrm{sn}\,x-\mathrm{sn}\,\beta'}. \end{aligned}$$

Cette limite est

$$-\frac{1}{km}\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\beta'}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\beta'}.$$

L'infini β'' conduit au résidu

$$\frac{1}{km}\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\beta''}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\beta''}.$$

La formule (1) devient ainsi

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{sn}m(x-a)\\
&=\sum\frac{1}{km}\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\left[\frac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+4j\frac{\mathrm{K}}{m}+a\right]}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\left[\frac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+4j\frac{\mathrm{K}}{m}+a\right]}\\
&\quad-\sum\frac{1}{km}\frac{\operatorname{sn}'x-\operatorname{sn}'\left[\frac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+(2j+1)\frac{2\mathrm{K}}{m}+a\right]}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\left[\frac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+(2j+1)\frac{2\mathrm{K}}{m}+a\right]}.
\end{aligned}$$

En faisant $a=0$, on a la formule de la multiplication pour le sinus amplitude. On peut vérifier la formule précédente en prenant $m=1$, on a alors

$$\begin{aligned}
&2k\operatorname{sn}(x-a)\\
&=\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)}\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+2\mathrm{K}+a)}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+2\mathrm{K}+a)};
\end{aligned}$$

et si l'on observe que $\operatorname{sn}'x=\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x$,

$$\operatorname{cn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{dn}x}{k\operatorname{sn}x},$$

$$\operatorname{dn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{sn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=\frac{1}{k\operatorname{sn}x},$$

on trouve

$$\operatorname{sn}(x-a)=\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}x-\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\operatorname{sn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2a}.$$

Ainsi notre méthode donne aussi l'addition des fonctions elliptiques.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la multiplication. La division aurait pour but de calculer $\operatorname{sn}\frac{x}{m}$, $\operatorname{cn}\frac{x}{m}$, ... en fonction de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, ... Sans entrer dans des détails à ce sujet, disons seulement qu'Abel a démontré que les équations d'où dépend la division des fonctions elliptiques sont comme celles d'où dépend la division des fonctions circulaires, résolubles par radicaux.

APPLICATION A L'ADDITION DES FONCTIONS DE TROISIÈME ESPÈCE.

Nous avons trouvé

$$\Pi(x, a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Si l'on désigne alors par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ des arguments tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0,$$

on aura

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha_1, a) &+ \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n+1}, a) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\alpha_1 - a)\Theta(\alpha_2 - a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} - a)}{\Theta(\alpha_1 + a)\Theta(\alpha_2 + a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} + a)}.\end{aligned}$$

La quantité placée sous le signe log possède les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ par rapport à la variable a; on pourra donc l'exprimer en vertu du théorème de M. Liouville en fonction rationnelle de $\operatorname{sn}a$ et de sa dérivée $\operatorname{sn}'a$ ou $\operatorname{cn}a \times \operatorname{dn}a$. Nous ne donnons pas ici cette expression, qui est un peu compliquée.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

La formule de Fourier donne

$$\operatorname{sn} x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}x}}{4K} \int_{x_0}^{x_0+4K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz;$$

reste à calculer la valeur de l'intégrale qui entre dans cette formule. D'abord, en posant

$$A_m = \int_{x_0}^{x_0+4K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz,$$

on trouve, au moyen de la formule $\operatorname{sn}(2K + x) = -\operatorname{sn} x$,

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{x_0}^{x_0+2K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+2K} (-\operatorname{sn} z)\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}(z+2K)}\, dz \\ &= \int_{x_0}^{x_0+2K} \operatorname{sn} z\,[1-(-1)^m]\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz. \end{aligned}$$

L'intégrale A_m étant indépendante de x_0, on peut supposer x_0 un peu plus petit que zéro. L'intégrale étant prise le long du contour rectiligne x_0, $x_0 + 2K$ peut être remplacée par deux parallèles à $K'\sqrt{-1}$ de longueur infinie, menées l'une par x_0 et l'autre par $x_0 + 2K$ au-dessous de l'axe des x, et par une parallèle à l'axe des x, menée à l'infini. Le long de ce nouveau contour, l'intégrale sera nulle; mais il faudra lui ajouter les résidus relatifs aux points $-K'\sqrt{-1}$, $-3K'\sqrt{-1}$, $-5K'\sqrt{-1}$, ..., multipliés par $2\pi\sqrt{-1}$. De plus, ces résidus seront pris dans le sens rétrograde.

Calculons le résidu relatif à ce point

$$-(2n+1)K'\sqrt{-1};$$

il est égal à

$$\lim \frac{x+(2n+1)K'\sqrt{-1}}{k\,\mathrm{sn}(x+K'\sqrt{-1})} e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}[-(2n+1)K'\sqrt{-1}]};$$

mais, $\mathrm{sn}'x$ étant égal à 1 pour $x=0$ ou $2\pi K'\sqrt{-1}$, cette quantité peut s'écrire

$$\frac{1}{k} q^{\frac{2n+1}{2}m}.$$

On a donc

$$A_m = \frac{1}{4kK} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\frac{2n+1}{2}m} [1-(-1)^m] 2\pi\sqrt{-1},$$

et l'on a

$$A_{2m} = 0,$$

$$A_{2m+1} = \frac{1}{2kK} \sum q^{\frac{2n+1}{2}(2m+1)} 2\pi\sqrt{-1};$$

par conséquent

$$A_{2m+1} = \frac{1}{2kK} \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} 2\pi\sqrt{-1}.$$

Quand m est négatif, on a

$$\int_0^{4K} \mathrm{sn}\,z e^{\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z} dz = -\int_0^{4K} \mathrm{sn}\,z dz e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}.$$

Les coefficients des termes également distants de l'origine sont donc égaux, et, en les groupant, on a

$$\mathrm{sn}\,x = \frac{\pi\sqrt{q}}{kK} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m+1}} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{4K},$$

$$\mathrm{cn}\,x = \frac{\pi\sqrt{q}}{kK} \sum_0^\infty \frac{q^m}{1-q^{2m+1}} \cos\frac{(2m+1)\pi x}{4K},$$

$$\mathrm{dn}\,x = \frac{\pi}{4K}\left(1+4\sum_1^\infty \frac{q^m}{1+q^m} \cos\frac{m\pi x}{2K}\right).$$

A ces formules il convient de joindre les suivantes, auxquelles on parvient d'une façon toute semblable :

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}},$$

$$\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} = \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}}.$$

$\dfrac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}$ devenant infini pour $x = 0$, on développera

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\mathrm{H}(x)}{\sin\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}}\right];$$

on trouvera alors

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \cot \frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}},$$

$$\frac{\mathrm{H}'_1(x)}{\mathrm{H}_1(x)} = -\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2\mathrm{K}} + \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum \frac{(-1)^m q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}}.$$

De ces dernières formules on tire

$$\frac{d \log \operatorname{sn} x}{dx} = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \cot \frac{\pi x}{2\mathrm{K}} - \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum \frac{q^m}{1 + q^m} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}},$$

$$\frac{d \log \operatorname{cn} x}{dx} = -\frac{\pi}{2\mathrm{K}} \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2\mathrm{K}} - \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum \frac{q^m}{1 + (-1)^m q^m} \sin \frac{m\pi x}{\mathrm{K}},$$

$$\frac{d \log \operatorname{dn} x}{dx} = -\frac{4\pi}{\mathrm{K}} \sum \frac{q^{2m-1}}{1 - q^{2(2m-1)}} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2\mathrm{K}}.$$

On arrive plus simplement à ces résultats comme il suit.

Rappelons la formule

$$-\frac{1}{2} \log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) = r\cos\alpha + \frac{r^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{r^3}{3}\cos 3\alpha \ldots,$$

et partons de

$$\Theta(x) = c\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^6\right)\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{1}{2}\log\Theta(x) = \frac{1}{2}\log c - \cos\frac{\pi x}{K}\frac{q}{1-q^2}$$
$$- \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{K}\frac{q^2}{1-q^4} - \ldots,$$

et, en prenant les dérivées, nous aurons le développement de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$. On obtient d'une façon analogue ceux de $\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}$, $\frac{H'(x)}{H(x)}$ et $\frac{H'_1(x)}{H(x)}$.

SUR LE PROBLEME DE LA TRANSFORMATION.

Le problème de la transformation a pour but la comparaison des fonctions elliptiques correspondant à des modules différents. Exposons, d'abord, la théorie que Jacobi donne dans son ouvrage intitulé : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum.*

Si dans l'expression

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

on pose $x = \frac{U}{V}$, U et V désignant des polynômes entiers en y, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} \\ &= \frac{V\,dU - U\,dV}{\sqrt{AV^4 + BV^3U + CV^2U^2 + DVU^3 + EU^4}}, \end{aligned}\right.$$

et l'on peut, d'une infinité de manières, déterminer U et V, de telle sorte que le second membre de cette formule soit de la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}}.$$

En effet, pour que dans le second membre de (4) le polynôme sous le radical se ramène au quatrième degré, il faut que ce polynôme, qui est d'un degré quadruple de celui de U et V, ne contienne que des facteurs doubles, à l'exception de quatre qui seront simples; on aura donc, en appelant T un polynôme entier,

$$\begin{aligned} &AV^4 + BV^3U + \ldots + EU^4 \\ &\quad = T^2(A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4); \end{aligned}$$

le second membre de (1) se réduira alors à la forme demandée si l'on a

$$(2) \qquad \frac{VdU - UdV}{Tdy} \text{ const.}$$

Or, il en est ainsi quand U et V, sont de même degré ou de degrés différents d'une unité. Soit en effet

$$\begin{aligned} &A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \\ &\quad = E(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta), \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &AV^4 + BV^3U + CV^2U^2 + DVU^3 + EU^4 \\ &\quad = E(U - \alpha V)(U - \beta V)(U - \gamma V)(U - \delta V). \end{aligned}$$

Les facteurs $(U - \alpha V)$, $(U - \beta V)$, ... sont premiers entre eux, car tout diviseur simple de $U - \alpha V$ et de $U - \beta V$, par exemple, sera diviseur simple de U et V, et, comme on peut supposer U et V premiers entre eux, les facteurs $U - \alpha V$, ... le seront aussi. Or on a identiquement

$$-\alpha(VdU - UdV) = (U - \alpha V)dU - Ud(U - \alpha V);$$

il en résulte que tout facteur double de $U - \alpha V$ est facteur de $VdU - UdV$, car ce facteur appartient à la dérivée $\frac{d}{dy}(U - \alpha V)$.

En résumé, le polynôme $AV^4 + BV^3U + \ldots$ jouit de cette propriété que ses facteurs doubles sont aussi facteurs doubles de $U - \alpha V$, de $U - \beta V$, de $U - \gamma V$ ou de $U - \delta V$, puisque ces polynômes ne peuvent avoir de facteur commun, et, par suite, ses facteurs doubles divisent $UdV - VdU$. Si donc on suppose tous les facteurs de $AV^4 + BV^3U + \ldots$ doubles, à l'exception de quatre d'entre eux, le polynôme T divisera

$$VdU - UdV.$$

Si alors on suppose que V et U soient de même degré p, ou l'un de degré p et l'autre de degré $p - 1$, $AV^4 + \ldots$ sera de degré $4p$, T^2 de degré $4p - 4$ et T de degré $2p - 2$;

$$UdV - VdU$$

est évidemment de même degré, et, par suite, la formule (2) est satisfaite.

On pourra donc effectuer la transformation d'une infinité de manières, car on pourra d'une infinité de manières déterminer les coefficients de U et V, de telle sorte que $AV^4 + BV^3U \ldots$ ait tous ses facteurs doubles à l'exception de quatre d'entre eux, U et V étant de degrés différents de zéro ou de 1.

Le *degré* de la transformation est le degré de celui des polynômes U, V qui possède le degré le plus élevé.