Nouvelles annales de mathématiques

Détermination analytique des foyers dans les sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 26-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__26_0>

DÉTERMINATION ANALYTIQUE DES FOYERS DANS LES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. E. G.,
Ancien élève du lycée de Reims.

On définit généralement un *foyer* un point tel, que la distance d'un point de la courbe à ce point soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées du point de la courbe.

Partant de cette définition, on arrive, par une méthode classique, mais peu élégante, à cinq relations entre les coordonnées du foyer, les coefficients de l'équation de la courbe et trois paramètres qui entrent au second degré. L'élimination de ces paramètres donnerait deux équations déterminant les coordonnées des foyers; mais cette élimination, sauf dans les cas les plus simples, donne lieu à des calculs impraticables.

On arrive rapidement et sans introduire de paramètre aux deux équations qui déterminent les foyers, en définissant ces points des cercles de rayon nul bitangents à la courbe et introduisant ainsi dans le calcul la notion des imaginaires.

La méthode suivante, qui, je crois, n'a pas encore été proposée, repose uniquement sur la première définition, laquelle fournit immédiatement trois équations, contenant un seul paramètre au premier degré. L'élimination se fait sans difficulté, et conduit aux deux mêmes équations que l'on obtient par l'emploi des imaginaires.

J'établirai d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme homogène du second degré à trois variables soit, à un facteur constant près, un carré parfait.

Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

un semblable polynôme. Pour que ce soit un carré parfait, il faut que, si l'on égale à zéro ce polynôme, à un système de valeurs de x et de y corresponde une seule valeur de la troisième variable z.

Égalant à zéro et résolvant par rapport à z, on a

$$cz = -(gx + fy) \pm \sqrt{(gx + fy)^2 - c(ax^2 + by^2 + 2hxy)}.$$

Pour qu'on ait une seule valeur de z, quels que soient x et y, il faut qu'on ait

$$g^2 - ac = 0, \quad f^2 - bc = 0, \quad fg - ch = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires. Elles sont aussi évidemment suffisantes. En effet, elles expriment que l'on a identiquement

$$c(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy) = (gx + fy + cz)^2.$$

Elles restent les mêmes si l'on considère un polynôme quelconque du second degré à deux variables de la forme

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

Cela posé, soit

$$(1) \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

l'équation d'une conique quelconque. Transportons l'origine en un point dont les coordonnées soient α et β. Si l'on désigne par S le résultat de la substitution de α et de β à la place de x et de y dans l'équation (1), la courbe rapportée aux nouveaux axes a pour équation

$$(2) \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{dS}{d\alpha}x + \frac{dS}{d\beta}y + S = 0.$$

Cherchons les conditions pour que l'origine soit un foyer. L'équation (2) peut s'écrire

$$\lambda(x^2 + y^2) = (a + \lambda)x^2 + 2hxy + (b + \lambda)y^2 + \frac{dS}{d\alpha}x + \frac{dS}{d\beta}y + S.$$

Le premier membre représente, au facteur arbitraire λ près, le carré de la distance d'un point de la courbe à l'origine; donc, pour que l'origine soit un foyer, il faut et il suffit que le second membre soit, à un facteur constant près, un carré parfait; on doit donc avoir les relations suivantes :

$$(3) \qquad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)^2 - 4(a + \lambda)S = 0,$$

$$(4) \qquad \left(\frac{dS}{d\beta}\right)^2 - 4(b + \lambda)S = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{dS}{d\alpha}\frac{dS}{d\beta} - 4hS = 0.$$

L'équation (5) ne contient pas λ. Éliminons λ entre (3) et (4); en retranchant membre à membre, on a

$$(6) \qquad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dS}{d\beta}\right)^2 - 4(a - b)S = 0.$$

Les équations (5) et (6) déterminent les coordonnées α et β des foyers par rapport aux axes primitifs.