HENRI BERGSON

# Question proposée au concours général de 1877, pour la classe de mathématiques élémentaires

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 17 (1878), p. 268-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__268_0>

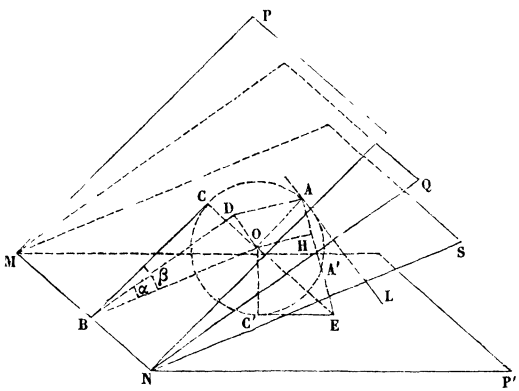
# QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877,

## POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

SOLUTION DE M. Henri BERGSON,

Élève du lycée Fontanes (*).

*Étant donnés deux plans* P *et* P′ *et un point* A *en dehors de ces deux plans, on considère toutes les sphères*




*qui passent par le point* A, *et qui sont tangentes aux deux plans donnés :*

1° *Trouver le lieu de la droite qui joint le point* A *au centre de la sphère variable ;*

2° *Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.*

I. Soient P et P′ les deux plans, MN leur intersection, O le centre d'une des sphères passant par le point

(*) M. Henri Bergson a obtenu le premier prix.

A et tangentes aux deux plans ; C et C′ les points de contact de cette sphère avec les deux plans ; Q le plan passant par le point A et la droite MN. Proposons-nous de trouver le lieu de la droite AO.

Remarquons d'abord que le point O, équidistant des plans P et P′, est situé dans le plan bissecteur S du dièdre PMNP′. Cela posé, abaissons sur le plan Q la perpendiculaire OD, et sur la droite MN la perpendiculaire OB ; puis tirons les droites BD, BC, OC, OA, AD. Les droites BD et BC étant, d'après un théorème connu, perpendiculaires sur MN, les angles OBD, OBC mesurent respectivement les deux dièdres SMNQ, SMNP, et, par suite, sont constants. Ces deux angles étant constants, il en est de même des rapports $\frac{OD}{OB}$, $\frac{OC}{OB}$, et, par conséquent, le rapport $\frac{OD}{OC}$, quotient des deux rapports précédents, est constant aussi.

Mais, OC étant égale à OA, le rapport $\frac{OD}{OA}$ est constant. Dès lors, dans le triangle rectangle ODA, le rapport $\frac{OD}{OA}$ étant constant, l'angle OAD l'est aussi, ainsi que son complément OAL, obtenu en élevant sur le plan Q la perpendiculaire AL. L'angle OAL étant constant, le lieu de la droite AO est la surface d'un cône de révolution dont l'axe est AL.

*Calcul du demi-angle du cône.* — Il est facile de calculer le demi-angle OAL de ce cône. Désignons, en effet, par $\alpha$ et $\beta$ les deux dièdres SMNQ, SMNP.

On a

$$\cos OAL = \sin OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{\frac{OD}{OB}}{\frac{OC}{OB}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

d'où

$$\cos \mathrm{OAL} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

*Discussion.* — Les angles $\alpha$ et $\beta$, l'un inférieur, l'autre égal à la moitié du dièdre PMNP′, sont toujours aigus; donc, pour que cos OAL et par suite OAL lui-même existent, il faut qu'on ait $\alpha < \beta$. Cette conséquence pouvait être prévue; car, si $\alpha$ est plus grand que $\beta$, le point A est extérieur au dièdre PMNP′, et la sphère O est tangente, non plus à P et à P′, mais à l'un d'eux et au prolongement de l'autre, ou aux prolongements de tous deux.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on a

$$\cos \mathrm{OAL} = 1,$$

et par conséquent l'angle OAL est nul. Le lieu se réduit donc à la droite AL. Ce résultat pouvait encore être prévu; car, si les angles $\alpha$ et $\beta$ sont égaux, le point A est contenu dans le plan P, et il n'existe plus qu'une seule sphère passant par le point A et tangente aux deux plans.

Si l'on suppose $\alpha = 0$, on a

$$\cos \mathrm{OAL} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{OAL} = 90^\circ.$$

Le lieu est alors la surface d'un cône dont le demi-angle est un angle droit, c'est-à-dire un plan. Ce résultat pouvait encore s'obtenir *a priori*, car, si l'angle $\alpha$ est nul, le point A est situé dans le plan bissecteur S, et toutes les droites AO sont contenues dans ce plan.

*Généralisation du problème.* — Dans le problème précédent, on a supposé que la sphère variable était tangente aux deux plans donnés, ou, en d'autres termes, faisait avec ces deux plans des angles nuls. On peut généraliser la question et supposer que la sphère variable, au lieu de faire avec les deux plans des angles nuls, coupe ces deux plans sous des angles déterminés. Je dis que le lieu de la droite AO est encore, dans ce cas, un cône ayant pour axe la droite AL.

En effet, soit O le centre de l'une des sphères considérées. Désignons par $r$ son rayon, et par $p, p', q$ les distances respectives du point O aux trois plans P, P', Q. La sphère coupant les deux plans sous des angles déterminés, on voit facilement que les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{p'}{r}$, et par suite leur quotient $\frac{p}{p'}$, sont constants. Le rapport $\frac{p}{p'}$ étant déterminé, le point O, d'après un théorème connu, est situé dans un plan déterminé S passant par MN. Dès lors, les trois plans P, Q, S se coupant suivant une même droite MN, on sait que le rapport des distances d'un point quelconque du plan S aux deux autres plans est constant. Donc le rapport $\frac{p}{q}$ est constant; et, comme le rapport $\frac{p}{r}$, ainsi qu'on l'a vu, est constant aussi, il en est de même du quotient $\frac{q}{r}$ de ces deux rapports. Ainsi, dans le triangle rectangle ODA, le rapport $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}$, est déterminé, et par suite l'angle OAD et son complément OAL sont constants. Le lieu de la droite AO est donc encore un cône de révolution ayant pour axe AL.

II. Proposons-nous maintenant de trouver le lieu du point de contact C' de la sphère O avec le plan P'.

Abaissons du point A, sur le plan bissecteur S, la perpendiculaire AH, qui coupe le plan S en H, et le plan P' en E; puis tirons les droites OH, OE, OC', EC', et désignons par A′ le point où AH coupe la sphère O. Les triangles OAH, OA′H étant évidemment égaux, le point A′ est le symétrique du point A par rapport au plan S ; donc ce point A′ est fixe. Or la droite EC′ étant tangente à la sphère, on a

$$\overline{EC'}^2 = EA \times EA' = \text{const.}$$

La droite EC′ étant constante, le lieu du point C′ est une circonférence dont le centre est E et le rayon EC′.

*Calcul du rayon.* — On a évidemment

$$\overline{EC'}^2 = \overline{EO}^2 - \overline{OC'}^2 = \overline{EO}^2 - \overline{OA}^2.$$

D'autre part, la droite AH, perpendiculaire au plan S, l'est aussi à la droite OH. On a donc

$$\overline{EO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{AH}^2$$

d'où

$$\overline{EC'}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{AH}^2.$$

*Discussion.* — La formule précédente montre que EH doit être plus grande que AH ; ce que l'on pouvait prévoir, puisque, dans le cas contraire, le point A serait extérieur au dièdre.

Si l'on suppose EH = AH, la droite EC′ devient nulle, et le cercle se réduit à un point. En effet, si les lignes EH et AH sont égales, le point A est dans le plan P, et il n'existe qu'une seule sphère passant par le point A et tangente aux deux plans.

Si l'on suppose AH = o, on a EC′ = EH ; ce qui était évident *a priori,* car alors le point A est situé dans le plan bissecteur S, et les deux droites EC′, EH sont tangentes à la sphère.

III. Des propositions précédentes on peut tirer diverses conséquences.

1. Remarquons d'abord que le point O, équidistant du point A et du plan P, se trouve situé sur un paraboloïde de révolution ayant le point A pour foyer et le plan P pour plan directeur. Pour la même raison, il est situé sur un paraboloïde dont le foyer est A et dont le plan directeur est P'. Enfin le point O est contenu dans le plan S. Le lieu du point O peut donc être défini, soit par l'intersection d'un plan et d'un paraboloïde, soit par l'intersection de deux paraboloïdes.

Or, le point O étant situé sur la droite OC', le lieu de ce point est situé sur la surface d'un cylindre droit dont la base est un cercle ayant E pour centre et EC' pour rayon ; donc le lieu du point O, intersection d'un cylindre et d'un plan, est une ellipse.

De là les deux théorèmes suivants :

1° *L'intersection d'un paraboloïde par un plan est une ellipse.*

2° *L'intersection de deux paraboloïdes ayant même foyer est une ellipse.*

D'autre part, on a vu que le lieu de la droite AO est un cône de révolution ; de là ce troisième théorème :

3° *Si l'on coupe un paraboloïde par un plan, le cône qui a pour base la section et pour sommet le foyer est un cône de révolution.*

Enfin on sait que le lieu du point C, projection du point O, est un cercle ; d'où ce quatrième théorème :

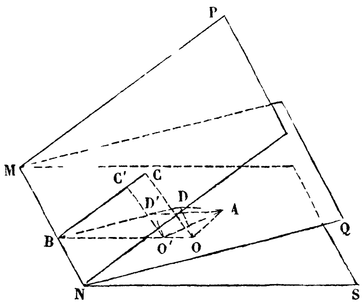
4° *Si l'on coupe un paraboloïde par un plan, la projection de la section sur un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle.*

2. Prenons, maintenant, pour origine un point quelconque de l'espace, et transformons par rayons vecteurs réciproques la figure considérée. Les deux plans P et P'

deviennent deux sphères, et la sphère O est encore une sphère nouvelle variable, passant par le point A et tangente aux deux autres. D'autre part, la circonférence ayant E pour centre, et EC′ pour rayon, devient une circonférence tracée sur la sphère réciproque du plan P′. On voit donc que, si les plans P et P′ sont remplacés par des sphères, le lieu du point C′ est encore une circonférence.

Si l'on suppose le centre d'inversion choisi dans l'un des plans P et P′, on voit que la solution reste la même quand un seul des plans donnés est remplacé par une sphère.

Enfin, si l'on prend pour centre d'inversion le point A,




les plans P et P′ deviennent des sphères, et les sphères O des plans ; d'où ce théorème bien connu :

*Si l'on mène des plans tangents à la fois à deux sphères données, le lieu des points de contact de ces plans avec chacune des sphères est un cercle.*

IV. — *Autres solutions des questions proposées.*

1° *Proposons-nous d'abord de trouver le lieu de la droite.*

Tous les points O doivent satisfaire à la condition d'être équidistants du point A et du plan P; ils sont de plus contenus dans le plan S. Considérons deux points O et O′ du plan S satisfaisant à cette condition; tirons les droites AO, AO′, et abaissons sur le plan P les perpendiculaires OC, O′C′, et sur le plan Q les perpendiculaires OD, O′D′; puis menons les trois droites OO′, CC′, DD′, qui aboutissent toutes trois au point B de la droite MN. On a

$$\frac{OD}{O'D'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OC}{O'C'};$$

et, comme on a $OC = OA$, et $O'C' = O'A$, on en déduit

$$\frac{OD}{O'D'} = \frac{OA}{O'A} \quad \text{ou} \quad \frac{OD}{OA} = \frac{O'D'}{O'A}.$$

Dès lors, si l'on tire AD et AD′, les deux triangles rectangles ADO, AD′O′ sont semblables; donc les angles OAD, O′AD′ que font avec le plan Q les droites AO, AO′ sont égaux, et l'on conclut, comme précédemment, que le lieu de AO est un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan Q.

2° *Cherchons, maintenant, le lieu du point de contact de la sphère variable avec l'un des deux plans.*

D'après le théorème de Dupuis, si une sphère variable est tangente à trois sphères données, le lieu du point de contact de la sphère variable avec chacune des trois autres est une circonférence.

Supposons que l'une des trois sphères fixes se réduise à un point et que les deux autres sphères se coupent : le théorème subsiste encore. Cela posé, transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine un des points de l'intersection des deux sphères. Le point donné devient alors un point A; les deux sphères deviennent deux plans P et P′. D'ailleurs, le lieu des points de contact de chacun de ces plans avec la sphère variable est encore une circonférence. Le problème est donc résolu.