

H. LAURENT

**Théorie élémentaire des fonctions elliptiques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 78-96

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_78\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__78_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ;**

**PAR M. H. LAURENT.**

---

Les personnes qui veulent étudier la théorie des fonctions elliptiques ont certainement d'excellents ouvrages à leur disposition : les *Fundamenta nova* de Jacobi, les

*OEuvres* d'Abel, l'ouvrage plus ancien de Legendre, sont des chefs-d'œuvre qu'il est bon d'avoir lus quand on veut approfondir la théorie des fonctions elliptiques. Le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet, résume aujourd'hui presque tous les faits acquis à la Science sur cette branche intéressante de l'Analyse; mais il n'existe pas de *Traité*, pour ainsi dire élémentaire, dans lequel on puisse prendre une idée suffisamment exacte de la théorie des fonctions elliptiques, sans cependant l'approfondir dans tous ses détails.

Nous croyons donc faire une chose utile en offrant aux lecteurs des *Nouvelles Annales* une théorie des fonctions elliptiques résumant leurs propriétés les plus importantes, et leurs principales applications à la Géométrie et à la Mécanique.

Nous n'avons pas l'intention, disons-le immédiatement, de suppléer à la lecture des grands maîtres; nos articles devront surtout avoir pour but de faciliter cette lecture et d'en inspirer le goût.

#### NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Avant d'aborder la question des fonctions elliptiques, nous ferons connaître quelques principes relatifs à la théorie générale des fonctions.

Nous représenterons une imaginaire  $x + y\sqrt{-1}$  par un point dont les coordonnées seront  $x$  et  $y$ , ou par une droite dont la longueur sera le module  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , faisant avec l'axe des  $x$  un angle  $\theta$  égal à l'argument de  $x + y\sqrt{-1}$ . Cet argument sera d'ailleurs pour nous l'un quelconque des angles ayant pour cosinus  $\frac{x}{r}$  et pour sinus  $\frac{y}{r}$ .

Quand nous dirons que le point  $x + y\sqrt{-1}$  décrit une courbe, il faudra entendre par là que le point dont les coordonnées sont  $x, y$  décrit cette courbe. On peut considérer l'expression  $X + Y\sqrt{-1}$ , où  $X$  et  $Y$  sont des fonctions de  $x$  et  $y$ , comme une fonction de  $x + y\sqrt{-1}$ . Cauchy se plaçait à ce point de vue, mais nous ne considérerons que les fonctions de  $x + y, \sqrt{-1}$  ayant une dérivée unique et bien déterminée. Cette condition d'avoir une dérivée unique impose à  $X$  et  $Y$  certaines propriétés que nous allons faire connaître. La dérivée de  $X + Y\sqrt{-1}$  est

$$\frac{dX + dY\sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}} = \frac{\frac{dX}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \sqrt{-1}\left(\frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}};$$

et, pour qu'elle soit indépendante du rapport  $\frac{dy}{dx}$ , c'est-à-dire de la manière dont  $dx + dy\sqrt{-1}$  tend vers zéro, il faut que

$$\frac{\frac{dX}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dY}{dx}}{1} = \frac{\frac{dX}{dy} + \sqrt{-1}\frac{dY}{dy}}{\sqrt{-1}};$$

d'où l'on conclut, en égalant les parties réelles et les coefficients de  $\sqrt{-1}$ ,

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dY}{dx} = -\frac{dX}{dy} \quad (*).$$

Nous supposerons ces relations toujours satisfaites; d'ailleurs, la manière dont on prend les dérivées des fonctions que l'on rencontre en analyse prouve que ces fonctions n'ont qu'une seule dérivée.

---

(\*) Pour l'interprétation de ces formules, voir le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet.

Une fonction qui n'a qu'une dérivée en chaque point, c'est-à-dire pour chaque valeur de la variable, a quelquefois été appelée *monogène*.

Une fonction est dite *monodrome* dans une portion C du plan, quand, le point qui représente sa variable (ou, pour abrégé, quand sa variable) se mouvant dans cette portion C du plan, la fonction reprend toujours la même valeur quand sa variable repasse par le même point.

Les fonctions bien définies, telles que les fonctions rationnelles, le sinus, le cosinus, l'exponentielle, etc., sont monodromes dans toute l'étendue du plan; car, leur variable étant donnée, elles sont entièrement définies. Il n'en est pas de même des fonctions irrationnelles; ainsi, pour ne prendre qu'un seul exemple,  $\sqrt{z-a}$  ou  $\sqrt{x+y\sqrt{-1}-a}$  n'est pas monodrome à l'intérieur d'un contour contenant le point  $a$ .

Imaginons, en effet, que le point  $z$ , ou  $x+y\sqrt{-1}$ , décrive un cercle de rayon  $r$  ayant pour centre le point  $a$ ; on sait que la droite qui représente la somme de deux imaginaires est la résultante des droites représentant chaque partie de la somme (\*); la droite  $re^{\theta\sqrt{-1}}$ , qui représentera la somme  $z-a$ , sera donc la résultante des droites qui représentent  $z$  et  $-a$ . Cette droite est celle qui va du point  $+a$  au point  $z$ . Supposer que le point  $z$  décrit un cercle de rayon  $r$  autour du point  $a$ , c'est donc supposer que le module  $r$  de  $z-a = re^{\theta\sqrt{-1}}$  reste constant. Cela posé, on a

$$\sqrt{z-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}.$$

---

(\*) Voir l'Ouvrage de Mouroy sur *La vraie théorie des quantités prétendues imaginaires*; sur le *Calcul des équipollences* (*Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, 1869); mon *Traité d'Algèbre*; l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet déjà cité, etc.

Que le point  $z$  se meuve sur le cercle en tournant dans le sens positif (celui dans lequel les angles croissent en Trigonométrie),  $\theta$  va croître ainsi que  $\frac{\theta}{2}$ . Mais, quand  $\theta$  aura varié de  $2\pi$ , le point  $z$  sera revenu à son point de départ, et  $z$  aura repris sa valeur initiale; il n'en sera pas de même de  $\sqrt{z - a}$ , qui sera devenu

$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta + 2\pi}{2} \sqrt{-1}} = - r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2} \sqrt{-1}},$$

et qui aura changé de signe.

#### DES INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES.

La fonction  $f(z)$  de la variable imaginaire

$$z = x + y \sqrt{-1}$$

est en réalité une fonction de deux variables, et si, entre  $x$  et  $y$ , on établit une relation, telle que

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$f(z)$  devient alors fonction de la seule variable  $t$ . Si l'on pose alors

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad X = \varphi(T), \quad Y = \psi(T),$$

et

$$z_0 = x_0 + y_0 \sqrt{-1}, \quad Z = X + Y \sqrt{-1},$$

l'intégrale

$$\int_{t_0}^T f(z) \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \sqrt{-1} \right) dt$$

aura une valeur bien déterminée. On représente souvent cette intégrale par le symbole

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz,$$

qui, comme l'on voit, est indéterminé si l'on ne dit pas de quelle façon  $x$  et  $y$  sont liés entre eux ou à  $t$ . Cette expression est ce que l'on appelle une *intégrale prise entre des limites imaginaires*; pour en préciser le sens, on ajoute la relation qui lie  $x$  à  $y$ , soit directement, soit par l'intermédiaire de la variable auxiliaire  $t$ .

Le plus souvent on emploie, pour fixer le sens de la notation  $\int_{z_0}^Z f(z) dz$ , un langage géométrique, et, au lieu de se donner les relations  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , on indique la nature de la courbe représentée par ces équations. Si, par exemple, on posait

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

on aurait  $x^2 + y^2 = 1$ , et si l'on intégrait par rapport à  $t$  de zéro à  $\pi$ , on dirait que l'on prend l'intégrale le long d'un demi-cercle de rayon un, décrit de l'origine comme centre et limité à l'axe des  $x$ .

Réciproquement, quand on se donne le *contour d'intégration*, on ramène facilement l'intégrale à une ou plusieurs autres prises entre des limites réelles. Supposons, par exemple, que l'on demande d'intégrer  $f(z) dz$  le long d'une droite inclinée à 45 degrés sur l'axe des  $x$ , issue de l'origine et aboutissant à un point situé à la distance  $l$  de l'origine.

Les équations de cette ligne seront

$$x = t \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = t \frac{\sqrt{2}}{2};$$

on aura

$$dx = dt \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad dy = dt \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et, par suite,

$$\int f(z) dz = \int_0^l f \left[ t \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{-1}) \right] (1 + \sqrt{-1}) \frac{\sqrt{2}}{2} dt.$$

Je prends pour limites 0 et  $l$ , parce que  $t$  représente la distance du point  $(x, y)$  à l'origine; cette distance est 0 ou  $l$ , selon que le point  $(x, y)$  est à l'origine ou à l'extrémité de la droite.

**THÉORÈME DE CAUCHY.** — *Le point  $z$  variant à l'intérieur d'un contour donné, si, à l'intérieur de ce contour, la fonction  $f(z)$  reste monodrome, homogène et finie, l'intégrale  $\int_{z_0}^Z f(z) dz$  conservera toujours la même valeur, pourvu que le chemin qui mène de  $z_0$  à  $Z$  ne sorte pas du contour donné, quel que soit d'ailleurs ce chemin.*

Pour démontrer ce théorème, un des plus féconds de toute l'Analyse, nous intégrerons la fonction  $f(z)$  le long de deux contours AMB, ANB. Soient  $s$  l'arc du premier

Fig. 1.



contour compté à partir du point A, et  $ks$  l'arc du second compté toujours à partir du même point A; soient

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad y_1 = \psi_1(s)$$

les équations du premier contour, et

$$x_2 = \varphi_2(ks), \quad y_2 = \psi_2(ks)$$

celles du second; et, en désignant par S l'arc AMB, supposons que  $kS$  soit l'arc ANB. Joignons maintenant les points correspondants des deux contours; soient M

et N deux points correspondants, c'est-à-dire tels que  $AN = kAM$ . Nous supposons que la droite MN soit tout entière dans l'intervalle compris entre les deux contours; considérons maintenant le contour ayant pour équations

$$x = \varphi_1(s) \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \varphi_2(ks) \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$y = \psi_1(s) \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \psi_2(ks) \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Pour  $\alpha = \alpha_1$ , il se réduira au premier contour AMB, et, pour  $\alpha = \alpha_2$ , il se réduira au second ANB; et, de plus, tous ses points seront compris à l'intérieur de l'aire AMBNA, quand on supposera  $\alpha$  compris entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Intégrons la fonction  $f(z)$  le long de ce contour, nous aurons

$$\begin{aligned} \int f(z) dz &= \int_0^S f(x + y\sqrt{-1}) \left( \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \sqrt{-1} \right) ds \\ &= \int_0^S f(z) \frac{dz}{ds} ds; \end{aligned}$$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$  restent d'ailleurs finis, ainsi que leurs dérivées prises par rapport à  $\alpha$ . Appelons  $u$  cette intégrale, nous aurons

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^S \frac{d}{d\alpha} \left[ f(z) \frac{dz}{ds} \right] ds,$$

ou

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^S \left[ f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{ds} + f(z) \frac{d^2z}{d\alpha ds} \right] ds,$$

ou, en intégrant le second terme par parties,

$$\frac{du}{d\alpha} = \left[ f(z) \frac{dz}{d\alpha} \right]_0^S + \int_0^S \left[ f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{ds} - f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{ds} \right] ds,$$

ou

$$\frac{du}{dz} = \left[ f(z) \frac{dz}{d\alpha} \right]_0^S.$$

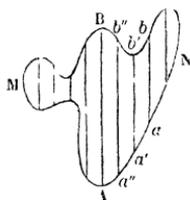
Or  $\frac{dz}{d\alpha}$  est nul pour  $s = 0$  et  $s = S$ , le contour passant en A et B pour  $s = 0$  et  $s = S$  quel que soit  $\alpha$ , c'est-à-dire ne dépendant pas alors de  $\alpha$ ; donc  $\frac{du}{dz} = 0$ , et, par suite,  $u$  ne dépend pas de  $\alpha$ ; il a donc la même valeur pour  $\alpha = \alpha_1$  et pour  $\alpha = \alpha_2$ , c'est-à-dire que l'intégrale prise le long de AMB ou de ANB conserve la même valeur. Cela suppose toutefois que  $f(z)$  conserve la même valeur, quel que soit le contour par lequel le point  $z$  se rend de A en B;  $f(z)$  doit donc être monodrome; elle doit aussi être monogène, car nous avons supposé

$$\frac{df}{d\alpha} = f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{df}{ds} = f'(z) \frac{dz}{ds},$$

c'est-à-dire que nous avons admis que  $f'(z)$  restait indépendant de la direction de l'accroissement donné à  $z$ , pour en faire le calcul; enfin nos raisonnements supposent  $f(z)$  et  $f'(z)$  finis.

Considérons maintenant deux contours quelconques

Fig. 2.



aboutissant en A et B, et désignons, pour abrégier, par (PRQ ...) l'intégrale de  $f(z)$  prise le long d'un contour désigné par PRQ ... Le théorème est démontré pour

deux contours formant à eux deux un contour fermé convexe, car une sécante joignant deux points correspondants ne rencontre le contour fermé qu'en deux points et reste intérieure à ce contour : il en résulte que l'intégrale prise le long d'un contour fermé convexe quelconque est nulle, car l'intégrale en question est égale à l'intégrale prise le long d'un contour infiniment petit. C'est cette proposition que nous allons d'abord généraliser : considérons le contour AMBN, décomposons-le en une infinité d'autres par des parallèles à une direction donnée, on obtiendra ainsi une série de contours convexes. En vertu de la notation adoptée, on aura alors

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots, \\ & (ab) + (bb') + (b'a') + (a'a) = 0, \\ & (a'b') + (b'b'') + (b''a'') + (a''a'') = 0, \\ & \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

si l'on ajoute toutes ces formules, les termes tels que  $(a'b')$  et  $(b'a')$  se détruisent, et il reste  $\Sigma(a'a) + \Sigma(bb') = 0$ , c'est-à-dire que l'intégrale prise le long du contour fermé total est nulle. On a donc

$$(AMB) + (BNA) = 0,$$

ou

$$(AMB) - (ANB) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(AMB) = (ANB).$$

C. Q. F. D.

#### CAS OU LE THÉORÈME DE CAUCHY TOMBE EN DÉFAUT.

Cauchy a remarqué que son théorème tombait en défaut dès que la fonction  $f(z)$  cessait d'être finie, continue, monodrome ou monogène, et il a tiré parti de ces cas pour enrichir la Science d'une de ses plus belles découvertes.

**THÉORÈME I.** — *L'intégrale d'une fonction monodrome, monogène, finie et continue (ou synectique, comme l'appelle Cauchy) à l'intérieur d'un contour fermé, est nulle quand on la prend le long de ce contour.*

En effet, elle est égale, comme nous l'avons déjà observé, à l'intégrale prise le long d'un contour quelconque, ayant la même origine et la même extrémité, intérieur à ce contour; le deuxième contour pouvant être pris aussi petit que l'on veut, puisque l'origine et l'extrémité se touchent, l'intégrale est nulle.

Cauchy appelle *résidu* de la fonction monodrome, monogène et continue  $f(z)$ , pour la valeur  $c$  qui rend  $f(z)$  infinie, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z) dz,$$

prise le long d'un contour circulaire de rayon infiniment petit, décrit du point  $c$  comme centre.

**THÉORÈME II.** — *Soient  $R_1, R_2, \dots, R_n$  les résidus de la fonction  $f(z)$  relatifs aux infinis  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de cette fonction, contenus à l'intérieur d'un contour fermé où elle reste monodrome et monogène, l'intégrale  $\int f(z) dz$  prise le long de ce contour sera égale à*

$$(R_1 + R_2 + \dots + R_n) 2\pi\sqrt{-1}.$$

Supposons qu'il n'y ait que deux infinis dans le contour, et qu'ils soient les centres des cercles  $bcd, ghi$ ; appelons en général (M) l'intégrale de  $f(z)$  le long du contour désigné par M.

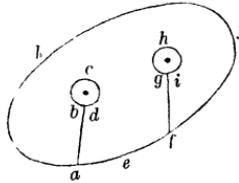
Le contour  $abcdafghifjka$  constitue un contour fermé ne contenant pas les infinis de  $f(z)$ ; donc  $(abcdafghifjka)$

est nul. Or

$$(abcdacfgl:ifjka) = (ab) + (bcd) + (da) + (acf) + (fg) \\ + (ghi) + (if) + (fjka);$$

le premier membre est nul;  $(ab) = -(da)$ , car ce sont les mêmes intégrales dont les limites sont inversées; de

Fig. 3.



même  $(fg) = -(if)$  et  $(fjka) + (acf)$  est l'intégrale proposée; on a donc

$$0 = (bcd) + (acf) + \int f(z) dz.$$

Or  $(bcd)$  est l'intégrale prise le long d'un contour circulaire très-petit décrit autour d'un infini,  $z$  marchant dans le sens rétrograde; cette intégrale est, au facteur près  $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$ , le résidu de  $f(z)$ ; donc

$$0 = -2\pi\sqrt{-1}R_1 - 2\pi\sqrt{-1}R_2 + \int f(z) dz,$$

ou

$$\int f(z) dz = 2\pi\sqrt{-1}(R_1 + R_2).$$

C. Q. F. D.

#### CALCUL DES RÉSIDUS.

Avant de montrer comment on calcule le résidu d'une fonction, nous allons revenir un instant sur la règle de la différentiation sous le signe  $\int$ . Cette règle est encore applicable quand on s'adresse à une intégrale prise entre des limites imaginaires, puisqu'une telle in-

tégrale revient à une autre prise entre des limites réelles. Enfin cette règle est encore applicable quand la variable par rapport à laquelle on différencie est imaginaire. En effet, différencier une quantité  $u$  par rapport à  $x + y\sqrt{-1}$ , c'est calculer le rapport

$$\frac{\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy}{dx + dy\sqrt{-1}}.$$

Ce rapport est indéterminé (excepté si  $u$  est une fonction monogène), et, pour en préciser le sens, on doit donner le rapport  $\frac{dy}{dx}$ , ou, si l'on veut, on doit supposer  $x$  et  $y$  fonctions données  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  d'une même variable  $t$ , et se donner  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dy}{dt}$ . On différencie alors le long de l'élément  $(dx, dy)$  appartenant à une courbe dont les équations sont  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ; on a alors l'expression suivante de la dérivée de  $u$

$$\frac{\frac{du}{dx} \varphi'(t) + \frac{du}{dy} \psi'(t)}{\varphi' + \psi' \sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut alors différencier l'intégrale

$$V = \int f(\mu, x + y\sqrt{-1}) d\mu$$

par rapport à  $x + y\sqrt{-1}$ , on formera  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$  par la règle ordinaire, et l'on aura

$$\frac{dV}{d(x + y\sqrt{-1})} = \int \frac{\frac{df}{dx} \varphi'(t) + \frac{df}{dy} \psi'(t)}{\varphi' + \psi' \sqrt{-1}} dt,$$

ou

$$\frac{dV}{d(x + y\sqrt{-1})} = \int \frac{df}{d(x + y\sqrt{-1})} dt,$$

et l'on voit que l'on différencie par rapport à un paramètre imaginaire comme par rapport à un paramètre réel.

Lorsque la quantité qui se trouve placée sous le signe  $f$  est monogène par rapport au paramètre, on peut raisonner encore plus simplement en faisant observer que  $\frac{du}{d(x + \gamma\sqrt{-1})}$  est égal à  $\frac{du}{dx}$ , et que, différentier par rapport à  $x + \gamma\sqrt{-1}$ , c'est en définitive différentier par rapport à la variable réelle  $x$ .

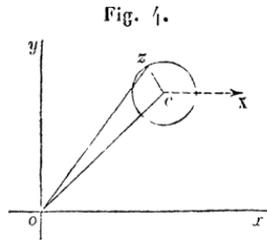
Cela posé, calculons d'abord le résidu de la fonction  $\frac{\varphi(z)}{z-c}$ ,  $\varphi(z)$  étant supposée finie et différente de zéro pour  $z = c$ ; ce résidu est

$$(1) \quad R = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{iz \cdot \varphi(z)}{z-c},$$

et l'intégrale est prise le long d'un contour circulaire infiniment petit décrit autour du point  $c$  comme centre. Soit  $\varepsilon$  le rayon de ce contour, on pourra poser

$$(2) \quad z = c + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

et faire varier  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ . En effet, la longueur de  $cz$



étant désignée par  $\varepsilon$ , et  $\varepsilon$  restant constant, le point  $z$  décrit le cercle de rayon  $\varepsilon$  et de centre  $c$ . L'angle  $\theta$  est l'angle  $zcX$  que  $zc$  fait avec l'axe  $Ox$ , et, quand le point  $z$

décrit le cercle,  $\theta$  varie évidemment de 0 à  $2\pi$ . De (2), on tire

$$dz = \varepsilon e^{i\theta} \sqrt{-1} d\theta \cdot \sqrt{-1};$$

(1) devient alors

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{i\theta} \sqrt{-1} + c) d\theta.$$

Or  $R$  est indépendant de la longueur du rayon  $\varepsilon$ , qu'il faut du reste supposer infiniment petit; donc, en faisant  $\varepsilon = 0$ , on a

$$R = \frac{1}{2\pi} \varphi(c) \int_0^{2\pi} d\theta = \varphi(c).$$

On voit donc que, si  $f(z)$  est une fonction telle que

$$(z - c)f(z),$$

pour  $z = c$ , soit une quantité finie différente de zéro, cette quantité sera précisément le résidu de  $f(z)$  relatif à son infini  $c$ .

Reprenons la formule (1), et remplaçons  $R$  par  $\varphi(c)$ , nous aurons

$$\varphi(c) = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(z) dz}{z - c},$$

et, en différentiant  $m - 1$  fois par rapport à  $c$ ,

$$\varphi^{m-1}(c) = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(z) dz}{(z - c)^m} 1.2.3 \dots (m - 1);$$

ou a donc

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(z) dz}{(z - c)^m} = \frac{\varphi^{m-1}(c)}{1.2.3 \dots (m - 1)},$$

et l'on a ainsi le résidu d'une fonction de la forme

$\frac{\varphi(z)}{(z - c)^m}$ , où  $\varphi(z)$  est finie et différente de zéro pour

$z = c$ , et  $m$  entier et positif. Dans la suite, nous ne rencontrerons que des résidus de fonctions de cette forme.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A LA RECHERCHE  
DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Proposons-nous d'abord de trouver la valeur de l'intégrale définie suivante, dans laquelle  $a$  est un nombre positif,

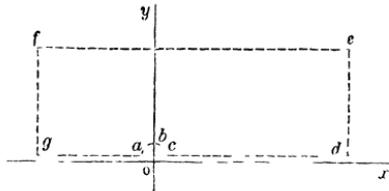
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

A cet effet, nous prendrons l'intégrale

$$\int \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} dz$$

le long du contour suivant formé : 1° d'une droite  $ga$  allant de  $-\infty$  au point  $a$  voisin de zéro ; 2° d'un demi-cercle très-petit  $abc$  décrit autour de l'origine avec le

Fig. 5.



rayon  $r$  ; 3° d'une droite allant de  $c$  vers  $+\infty$  ; 4° d'une perpendiculaire  $de$  à l'axe des  $y$ , située à l'infini ; 5° d'une parallèle  $ef$  à l'axe des  $x$ , située à l'infini ; 6° d'une perpendiculaire  $fg$  située également à l'infini ; nous aurons, en supposant  $a$  positif,

$$(ga) = \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{x} dx,$$

$$(abc) = -\frac{1}{2} 2\pi \sqrt{-1} \cdot \text{résidu de } \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} = -\pi \sqrt{-1},$$

$$(cd) = \int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x} dx,$$

$$(de) = \int_0^\infty \frac{e^{a\sqrt{-1}(x+y\sqrt{-1})} dy}{\infty + y\sqrt{-1}} \sqrt{-1} = 0,$$

$$(ef) = (fg) = 0.$$

Le contour total d'intégration ne contenant pas d'infini de  $\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z}$ , l'intégrale prise le long de ce contour est nulle; donc

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}}{x} dx - \pi\sqrt{-1} + \int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x} dx = 0.$$

Or la première intégrale devient

$$- \int_r^\infty \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}}{x} dx,$$

quand on y change  $x$  en  $-x$ ; et, par suite,

$$\int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-ax\sqrt{-1}}}{x} dx = \pi\sqrt{-1},$$

ou, pour  $r = 0$ ,

$$\int_0^\infty 2\sqrt{-1} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi\sqrt{-1},$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ct} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi.$$

La fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$$

ne contient donc pas  $a$ , mais elle en dépend; en effet,

en changeant le signe de  $a$ , elle change de signe; cela s'explique, car, en posant  $ax = z$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ar}{x} dx = \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Si nous intégrons  $\int e^{-z^2} dz$  le long de l'axe des  $x$  et d'une parallèle à cet axe située à la distance  $a$ , et si nous fermons ce contour par deux parallèles à l'axe des  $y$  situées à l'infini, nous trouverons zéro; or les intégrales relatives à ces parallèles à l'axe des  $y$  sont nulles, ce qui se voit en écrivant notre intégrale ainsi :

$$\begin{aligned} \int e^{-z^2} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{-\infty^2+y^2-\infty y\sqrt{-1}} dy \sqrt{-1} \\ &\quad + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2+a^2-2ax\sqrt{-1}} dx \\ &\quad + \int_a^0 e^{-\infty+y^2-\infty y\sqrt{-1}} dy \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

on a donc

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+a^2-2ax\sqrt{-1}} dx;$$

on en tire

$$0 = \sqrt{\pi} - e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2ax - \sqrt{-1} \sin 2ax) dx;$$

d'où, séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} e^{-a^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx, \\ 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2ax dx. \end{aligned}$$

Si l'on veut obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^2},$$

on peut observer qu'elle est la partie réelle de celle-ci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2} dx,$$

laquelle est égale à

$$\int \frac{e^{az\sqrt{-1}} dz}{1+z^2}$$

prise le long de l'axe des  $x$ . Mais on peut remplacer l'axe des  $x$  par un demi-contour circulaire de rayon infini décrit de l'origine comme centre et situé au-dessus de l'axe des  $x$ . En effet, à l'intérieur de l'aire limitée par l'axe des  $x$  et ce dernier contour, la fonction intégrée reste finie et continue, pourvu que  $a$  soit positif, excepté pourtant au point  $z = \sqrt{-1}$ ; donc la différence des deux intégrales ne sera pas nulle, mais bien égale au résidu de  $\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{1+z^2}$  relatif à  $z = \sqrt{-1}$ , c'est-à-dire à  $\frac{e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$  multiplié par  $2\pi\sqrt{-1}$ , ce qui donne  $\pi e^{-a}$ . Mais l'intégrale prise le long du contour demi-circulaire est nulle; pour l'évaluer, il faut prendre  $z = Re^{\theta\sqrt{-1}}$  et faire varier  $\theta$  de  $\pi$  à  $0$ , ce qui donne

$$\int_{\pi}^0 \frac{e^{R \cos \theta \sqrt{-1} - R \sin \theta}}{1 + R^2 (\cos 2\theta + \sqrt{-1} \sin 2\theta)} d\theta R e^{\theta \sqrt{-1}} \sqrt{-1}.$$

Pour  $R = \infty$ , cette intégrale est bien nulle, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}.$$

(A suivre.)

BIBLIOTHÈQUE  
GRENOBLE  
UNIVERSITAIRE