NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 529-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__529_0>

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

[SUITE (*).]

21. Puisqu'une droite correspond à une droite, il est naturel d'étudier les systèmes où les droites de l'infini se correspondent.

Dans la figure ABC, la droite de l'infini a pour équation

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

Représentons la droite correspondante de l'autre figure par l'équation

$$(18)\qquad P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0.$$

Les quantités P', Q', R' sont définies par les relations

$$\lambda P' \sin A = \mu Q' \sin B = \nu R' \sin C.$$

L'équation (18) devient donc

$$(19)\qquad \frac{X'}{\lambda \sin A} + \frac{Y'}{\mu \sin B} + \frac{Z'}{\nu \sin C} = 0.$$

Cette équation doit être identique avec la suivante :

$$(20)\qquad X' \sin A' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = 0.$$

Identifiant les équations (19) et (20), on trouve pour conditions

$$(21)\qquad \lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C';$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 422, 451, 496.

ces équations (21) expriment que les droites de l'infini se correspondent.

Cherchons leur interprétation géométrique; on voit facilement que la droite

$$PX + QY + RZ = 0 \tag{22}$$

coupe le côté BC du triangle ABC en un point α, tel que

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = -\frac{R}{Q}\frac{\sin B}{\sin C}. \tag{23}$$

De même la droite correspondante

$$P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0 \tag{24}$$

coupe le côté $B'C'$ du triangle $A'B'C'$ en un point α', tel que

$$\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = -\frac{R'}{Q'}\frac{\sin B'}{\sin C'}; \tag{25}$$

multipliant (23) par (25),

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = \frac{RR'}{QQ'}\frac{\sin B \sin B'}{\sin C \sin C'},$$

ou bien, à cause des relations $\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR'$,

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = \frac{\mu \sin B \sin B'}{\nu \sin C \sin C'}. \tag{26}$$

La relation (26) est vraie dans tous les systèmes; mais, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent, la relation (26), d'après les équations (21), prend une forme plus simple qui est

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = 1. \tag{27}$$

La relation (27) et les analogues équivalent aux relations (21). Elles signifient que les rapports dans lesquels les droites correspondantes divisent les côtés de même nom dans les triangles de référence sont réciproques.

Les relations (21) laissent les deux triangles absolument arbitraires et ne déterminent que λ, μ et ν.

Si, en particulier, les deux triangles sont égaux et confondus, les points α et α' sont évidemment symétriques par rapport au milieu de BC. On obtient ainsi un mode de transformation imaginé *a priori* par M. Gohierre de Longchamps (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III). Le procédé de M. Gohierre de Longchamps offre cet avantage que les deux figures homographiques signalées au n° 19 sont semblables. Mais cet avantage n'appartient pas exclusivement à ce procédé : nous avons rencontré incidemment plusieurs procédés simples ayant le même caractère. C'est ce qui nous a décidé à entreprendre la recherche analytique de tous les systèmes de transformation doués de cette propriété. Nous exposerons plus loin le résultat de cette recherche.

22. Pour le moment, nous allons étudier les propriétés générales des systèmes où les droites de l'infini se correspondent.

On a vu que les points de la figure ABC qui se transforment en paraboles dans la figure A'B'C' sont situés sur une droite que nous avons appelée pour ce motif *droite parabolique* et dont l'équation est

$$\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'} = 0.$$

Dans les systèmes caractérisés par les conditions (21), l'équation précédente devient

$$x \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0,$$

c'est-à-dire que dans chacune des deux figures la droite parabolique n'est autre que la droite de l'infini.

Ainsi, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent, ce sont les points de la droite de l'infini de chaque figure qui se transforment en paraboles dans l'autre figure.

Dans ces mêmes systèmes les points pris sur la droite de l'infini donnent dans l'autre figure des paraboles, c'est-à-dire des coniques dont les centres sont sur la droite de l'infini de cette seconde figure. Ainsi les droites de l'infini se correspondent également dans les deux figures homographiques signalées au n° 19, de façon que *des droites parallèles ont pour homographiques des droites parallèles*.

Mais une propriété plus remarquable des systèmes caractérisés par les équations (21) consiste en ce fait que les figures homographiques signalées au n° 19 ont des aires proportionnelles.

Pour démontrer ce fait, remontons à l'équation (14), savoir :

$$X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right)}{\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'}}.$$

Puisque dans les systèmes actuels on a

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C',$$

on peut poser

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C' = K;$$

d'où l'on déduit

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C$$
$$= K\left(\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'}\right).$$

La valeur de X' s'écrit donc

$$X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right)}{\frac{1}{K}(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)},$$

ou bien encore, en désignant par S l'aire du triangle ABC et par R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle,

$$(28) \qquad X' = \frac{KRR'}{S}\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right).$$

Si, dans cette formule et les analogues, on remplace X, Y, Z, X', Y', Z' en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, x', y', et si l'on résout deux de ces trois équations en x' et y', on obtient

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = a'x + b'y + c'.$$

D'après la forme de ces deux relations, les aires correspondantes sont proportionnelles dans les figures homographiques, et le rapport des aires a pour valeur

$$\pm \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

C'est ce que nous avons établi dans un autre travail ([1]).

Au lieu de calculer la valeur de ce déterminant, il est plus simple de calculer en coordonnées trilatères le rapport de deux triangles correspondants.

Soit Σ l'aire d'un triangle quelconque dans la figure ABC, Σ' l'aire du triangle homographique dans la figure A'B'C'.

(*) *Relation entre les volumes correspondants de certaines figures homographiques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*; 1873).

On a la formule

$$\Sigma' = \pm \frac{R'}{2S'} \begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}.$$

Remplaçant les coordonnées du second membre par leurs valeurs tirées de la formule (28) et des formules analogues, on a

$$\Sigma' = \pm \frac{K^3 R^3 R'^4}{2S^3 S'} \begin{vmatrix} \frac{Y_1}{\mu}\sin C' + \frac{Z_1}{\nu}\sin B' & \frac{Z_1}{\nu}\sin A' + \frac{X_1}{\lambda}\sin C' & \frac{X_1}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_1}{\mu}\sin A' \\ \frac{Y_2}{\mu}\sin C' + \frac{Z_2}{\nu}\sin B' & \frac{Z_2}{\nu}\sin A' + \frac{X_2}{\lambda}\sin C' & \frac{X_2}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_2}{\mu}\sin A' \\ \frac{Y_3}{\mu}\sin C' + \frac{Z_3}{\nu}\sin B' & \frac{Z_3}{\nu}\sin A' + \frac{X_3}{\lambda}\sin C' & \frac{X_3}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_3}{\mu}\sin A' \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\Sigma' = \pm \frac{K^3 R^3 R'^4}{2S^3 S'} \frac{\sin A' \sin B' \sin C'}{\lambda\mu\nu} 2 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma' = \frac{K^3 R^3 R'^4}{2S^3 S'} \frac{\sin A' \sin B' \sin C'}{\lambda\mu\nu} 2 \frac{2S}{R} \Sigma,$$

$$\Sigma' = \Sigma \frac{K^3 R^2 R'^2}{S^2 \lambda\mu\nu}.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda = \frac{K}{\sin A \sin A'}, \quad \mu = \frac{K}{\sin B \sin B'}, \quad \nu = \frac{K}{\sin C \sin C'};$$

on peut donc écrire

$$\Sigma' = \Sigma \frac{R^2 R'^2 \sin A \sin B \sin C \sin A' \sin B' \sin C'}{S^2},$$

$$\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{1}{4} \frac{S'}{S}.$$

Si $S' = 4S$, les figures homographiques ont des aires équivalentes.

23. Dans la figure ABC, un point M est défini par deux de ses coordonnées Y et Z. De même, dans la figure $A'B'C'$, un point M' est défini par deux de ses coordonnées Y' et Z'. Cherchons les deux relations qui expriment que les points M et M' décrivent des courbes semblables.

Soient $O'(Y'_0, Z'_0)$ le point correspondant de A, $O'R$ la direction qui correspond à AC, faisant un angle β avec $A'C$, h le rapport de similitude.

Soient
$$MAC = M'O'R = \alpha \quad \text{et} \quad AM = \rho;$$
alors
$$O'M' = h\rho.$$
On a les équations
$$\begin{aligned} Y &= \rho \sin\alpha, \\ Z &= \rho \sin(A - \alpha), \end{aligned}$$
et aussi les suivantes :
$$\begin{aligned} Y' &= Y'_0 + h\rho \sin(\alpha + \beta), \\ Z' &= Z'_0 + h\rho \sin(A' - \alpha - \beta). \end{aligned}$$
Éliminant α et ρ entre ces quatre relations, on obtient

$$(29)\qquad (Y' - Y'_0) \sin A = hY \sin(A + \beta) + hZ \sin\beta,$$
$$(30)\qquad (Z' - Z'_0) \sin A = hY \sin(A' - A - \beta) + hZ \sin(A' - \beta).$$

Ces formules expriment que les points M et M' décrivent des courbes semblables.

24. Si, dans les formules (29) et (30), on porte les valeurs de Y' et Z' tirées des deux formules analogues à la formule (14), et si, dans les deux formules nouvelles ainsi obtenues, on remplace X en fonction de Y et de Z, on a les deux identités en Y et Z, qui expriment que les deux figures homographiques du n° 19 sont semblables. Ces identités se décomposent en équations, et ces équa-

tions servent : 1° à calculer Y'_0, Z'_0, β, h; 2° à définir les systèmes où les figures homographiques en question sont semblables.

Nous avons fait ce calcul. Sans être bien élégant, il n'a rien de trop pénible; mais il vaut mieux le simplifier par des considérations géométriques.

25. Nous avons vu que, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent par transformation du second ordre, les droites parallèles de l'une des figures homographiques correspondent à des droites parallèles de l'autre. La réciproque est vraie; car, si cette dernière condition est remplie, les droites de l'infini se correspondent dans les figures homographiques; donc la droite parabolique de chaque figure est confondue avec la droite de l'infini de la même figure; donc on a

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C';$$

donc enfin les droites de l'infini se correspondent dans la transformation du second ordre.

Si, en particulier, on considère les systèmes où les figures homographiques du n° 19 sont semblables, il est clair que les angles homologues sont égaux et qu'en particulier les angles nuls ont pour homologues des angles nuls; en d'autres termes, les lignes parallèles ont pour homologues des lignes parallèles. On est donc nécessairement dans un de ces systèmes où les droites de l'infini se correspondent par transformation du second ordre, systèmes caractérisés par les conditions

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C'.$$

C'est donc parmi ces derniers systèmes exclusivement qu'il faut chercher des figures homographiques semblables.

On arrive d'ailleurs à cette conclusion en faisant le calcul indiqué au n° 24.

26. Mais il vaut mieux prendre cette conclusion comme point de départ, pour simplifier ce calcul. Cette simplification consiste en ceci, qu'au lieu de porter dans les formules (29) et (30) les valeurs générales de Y′ et Z′ fournies par les formules analogues à la formule (14), on y portera les valeurs de Y′ et Z′ fournies par les formules analogues à la formule (28).

D'après cette formule (28), on a

$$Y' = \frac{KRR'}{S}\left(\frac{Z}{\nu}\sin A' + \frac{X}{\lambda}\sin C'\right),$$

ou bien, en remplaçant λ et ν par leurs valeurs,

$$Y' = \frac{RR'\sin A'\sin C'}{S}(Z\sin C + X\sin A).$$

Dans cette formule, remplaçons X par sa valeur tirée de la relation générale

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R};$$

nous aurons

$$Y' = R'\sin A'\sin C' - \frac{RR'\sin A'\sin C'}{S}Y\sin B.$$

Enfin, remplaçant S par sa valeur en fonction de R, A, B, C,

$$(31)\qquad Y' = R'\sin A'\sin C' - \frac{R'}{2R}\frac{\sin A'\sin C'}{\sin A\sin C}Y,$$

on a, par analogie,

$$(32)\qquad Z' = R'\sin A'\sin B' - \frac{R'}{2R}\frac{\sin A'\sin B'}{\sin A\sin B}Z.$$

Portant ces valeurs (31) et (32) dans les relations (29) et (30), et exprimant que celles-ci deviennent alors des identités en Y et Z, on obtient les six équations suivantes :

$$Y'_0 = R' \sin A' \sin C',$$
$$Z'_0 = R' \sin A' \sin B',$$
$$\sin \beta = 0,$$
$$\sin(A' - A - \beta) = 0,$$
$$h \sin(A + \beta) = -\frac{R'}{2R} \frac{\sin A' \sin C'}{\sin C},$$
$$h \sin(A' - \beta) = -\frac{R'}{2R} \frac{\sin A' \sin B'}{\sin B}.$$

Ce système est facile à résoudre; il donne les résultats suivants :

$$\beta = \pi,$$
$$A' = A,$$
$$B' = B,$$
$$C' = C,$$
$$h = \frac{R'}{2R},$$
$$Y'_0 = R' \sin A' \sin C',$$
$$Z'_0 = R' \sin A' \sin B'.$$

Il semble que nous ayons ici une équation de plus ; mais il faut remarquer que les trois équations

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C$$

ne sont pas distinctes.

En résumé, pour que les figures homographiques soient semblables, il faut et il suffit : 1° que les droites de l'infini se correspondent dans la transformation du second ordre ; 2° que les deux triangles de référence soient semblables.

Ces conditions étant remplies, on trouve les valeurs de β, h, Y'_0 et Z'_0. Faisons quelques remarques sur ces valeurs.

Le rapport de similitude h n'est pas égal à celui des triangles de référence, mais seulement à sa moitié. Pour avoir des figures homographiques égales, il faudrait donc prendre $R' = 2R$.

Cherchons la position du point O' qui correspond au point A. Les valeurs de Y'_0 et Z'_0 satisfont évidemment à la relation suivante :

$$Y'_0 \sin B' = Z'_0 \sin C',$$

ce qui prouve que le point O' est sur la médiane qui va du point A' au milieu du côté $B'C'$. Pour achever de déterminer le point O', calculons X'_0 par la relation générale

$$X'_0 \sin A' + Y'_0 \sin B' + Z'_0 \sin C' = 2R' \sin A' \sin B' \sin C'.$$

Cette relation, combinée avec les valeurs de Y'_0 et X'_0, donne $X'_0 = 0$. Ainsi le point O' est sur $B'C'$; donc le point correspondant de A est le milieu de $B'C'$.

Par analogie, celui de B est le milieu de $A'C'$ et celui de C est le milieu de $A'B'$.

Quand les deux triangles sont dans un même plan et qu'ils ont leurs côtés de même nom parallèles, les deux figures sont homothétiques, et le centre commun d'homothétie se trouve sur les droites qui joignent les points correspondants. Par exemple, dans le procédé de M. Gohierre de Longchamps, les deux triangles sont confondus; au sommet A correspond le milieu de BC : donc le centre d'homothétie est sur la médiane correspondante. Il est de même sur les autres; donc il est au centre de gravité du triangle : c'est en effet le résultat obtenu par M. Gohierre de Longchamps.

27. Que l'on imagine maintenant un procédé quelconque de transformation. La première chose à faire sera de le classer dans une des catégories que nous avons obtenues. Les lois de la transformation seront par là même connues avec précision. Prenons un exemple.

Soit un angle yox. Une droite de la figure F coupe les côtés ox et oy en P et Q. On déplace P dans le sens ox d'une longueur $PP' = \alpha$ et Q dans le sens oy d'une longueur $QQ' = \beta$. On a ainsi la droite correspondante $P'Q'$ de la figure F'. Pour passer de la figure F' à la figure F, on doit nécessairement déplacer de la même longueur et en sens inverse. On voit en passant que ce mode de transformation se prête aisément au calcul.

Mettons au point O les lettres C et C'. Prenons $OA' = \alpha$ dans le sens ox, $OA = \alpha$ en sens inverse, $OB' = \beta$ dans le sens oy, et $OB = \beta$ en sens inverse. Aux droites de la figure F, passant respectivement par A, B, C, correspondent dans la figure F' les droites $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$. Inversement aux droites de la figure F', passant par A', B', C', correspondent dans la figure F les droites BC, AC, AB. Par conséquent, ABC est le triangle de référence dans la figure F, et $A'B'C'$ dans la figure F'. Ces triangles sont égaux.

D'ailleurs, il est évident que les droites de l'infini se correspondent, ce qui prouve incidemment que les droites correspondantes coupent les côtés correspondants des triangles dans des rapports réciproques, chose facile à vérifier.

Il est maintenant visible que, si un point décrit une courbe dans la figure ABC, le centre de la conique correspondante décrit dans la figure $A'B'C'$ une conique homothétique deux fois plus petite.

Le centre d'homothétie est le point de concours des droites obtenues en joignant le point A au milieu de $B'C'$, le point B au milieu de $A'C'$, le point C au milieu de $A'B'$. Il est visible que ce point de concours est le sommet R du parallélogramme obtenu en menant par A' une parallèle à oy, et par B' une parallèle à ox.

On voit que l'homothétie est directe, parce que les côtés de même nom des triangles de référence sont parallèles et de sens contraires.

Tous ces résultats s'établissent sans peine, indépendamment de nos théories générales. Il n'y a qu'à considérer la conique qui correspond à un point et à chercher les tangentes de cette conique qui sont parallèles à ox et à oy.