Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 467-469

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__467_0>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Des surfaces du second degré qui touchent les mêmes plans.

143. Désignons par I_E, I'_E les indices d'un plan E par rapport aux deux surfaces S et S'; si l'on a entre ces indices la relation

$$I_E - \varphi I'_E = 0,$$

dans laquelle φ est un *paramètre* donné, le plan E enveloppera une surface Φ qui touchera tous les plans tangents communs aux surfaces S et S'.

En supposant les surfaces S et S' rapportées à leur tétraèdre autopolaire ou conjugué commun *abcd*, la forme de la relation précédente montre que ce tétraèdre est également conjugué à toute surface Φ qui touche les plans tangents communs aux deux premières, ou qui est inscrite à la développable (SS').

Des relations établies (85, 30°) on déduit les suivantes :

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{(a, A)^2} I_A \qquad (4 \text{ termes}),$$

$$-I_{\varepsilon\varepsilon'} = \pi^2 \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_C I_D}{\sin^2 \overline{CD}} \qquad (6 \text{ termes}),$$

$$-\pi^2 I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{I_A} \qquad (4 \text{ termes}).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529. et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289.

Elles donnent l'indice du système de deux plans, de deux droites et de deux points à l'aide de formules qui ne contiennent que les indices des faces A, B, C, D du tétraèdre autopolaire commun aux surfaces S et S'.

144. Il suit de là que, si nous prenons dans l'espace deux plans E, E', deux droites ε, ε', deux points e, e', les paramètres des surfaces inscrites à la développable (SS'), et qui sont respectivement conjuguées aux plans, aux droites et aux points sont déterminés par les relations

$$(1)\qquad 0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})(a, \mathrm{E}')}{(a, \mathrm{A})}(\mathrm{I_A} - \varphi \mathrm{I'_A}),$$

$$(2)\qquad 0 = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{(\mathrm{I_C} - \varphi \mathrm{I'_C})(\mathrm{I_D} - \varphi \mathrm{I'_D})}{\sin^2 \mathrm{CD}};$$

$$(3)\qquad 0 = \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})}{\mathrm{I_A} - \varphi \mathrm{I'_A}}.$$

Si l'on développe ces équations en tenant compte des relations établies (85), on trouvera

$$(1)'\qquad 0 = \mathrm{I_{EE'}} - \varphi \mathrm{I'_{EE'}},$$

$$(2)'\qquad 0 = \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\pi^2} + \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{\mathrm{I_C I'_D} + \mathrm{I_D I'_C}}{\sin^2 \mathrm{CD}} + \varphi^2 \frac{\mathrm{I'}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\pi'^2},$$

$$(3)'\qquad 0 = \frac{\mathrm{I}_{ee'}}{\pi^4} - \varphi \frac{\mathrm{M'}}{\pi^4} + \varphi^2 \frac{\mathrm{M}}{\pi'^4} - \varphi^3 \frac{\mathrm{I'}_{\varepsilon'}}{\pi'^4},$$

en posant

$$\mathrm{M} = \mathrm{I'}_{ee'} \sum \frac{\mathrm{I_A}}{\mathrm{I'_A}} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})\mathrm{I_A}}{\mathrm{I_A^2}},$$

$$\mathrm{M'} = \mathrm{I}_{ee'} \sum \frac{\mathrm{I'_A}}{\mathrm{I_A}} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})\mathrm{I'_A}}{\mathrm{I_A^2}}.$$

π et π' sont les produits des demi-axes des surfaces S et S'.

Ces relations montrent que, à la développable (SS'), on peut inscrire une surface conjuguée au système de deux plans, deux surfaces conjuguées au système de deux droites et trois surfaces conjuguées au système de deux points.

Lorsque le plan E' coïncide avec le plan E, la droite ε' avec ε, le point e' avec e, les équations (1), (2), (3) ou leurs transformées seront respectivement l'équation par plans, l'équation par droites et l'équation par points de la surface Φ inscrite à la développable (SS').

(*A suivre.*)