Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 429-432
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__429_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1180

(voir 2e série, t. XIV, p. 336);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient vingt-quatre sur le côté de la base. (ÉDOUARD LUCAS.)

On sait, en effet, que la somme des carrés des x premiers nombres entiers a pour expression

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

on doit donc poser

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2;$$

mais les facteurs x, $x+1$ et $2x+1$ sont premiers entre eux, et l'équation précédente donne les neuf décompositions suivantes :

I.	$x=6u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=w^2$;
II.....	$x=3u^2$,	$x+1=2v^2$,	$2x+1=w^2$;
III. ..	$x=3u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=2w^2$;
IV....	$x=2u^2$,	$x+1=3v^2$,	$2x+1=w^2$;
V.....	$x=2u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=3w^2$;
VI....	$x=u^2$,	$x+1=6v^2$,	$2x+1=w^2$;
VII. .	$x=u^2$,	$x+1=3v^2$,	$2x+1=2w^2$;
VIII...	$x=u^2$,	$x+1=2v^2$,	$2x+1=3w^2$;
IX....	$x=u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=6w^2$.

Nous allons examiner successivement ces neuf hypothèses.

I. On a

(1) $$w^2-1=12u^2,$$

et, par suite, puisque les facteurs $w+1$ et $w-1$ ont leur plus grand commun diviseur égal à 2, on en déduit, en admettant les valeurs négatives de w,

(2) $$w-1=2\alpha^2;$$

mais, d'autre part,

(3) $$w^2+1=2v^2.$$

Les équations (2) et (3) doivent être vérifiées en même temps. Le système de ces deux équations a été traité complétement par M. Gerono (*); il n'admet pour solu-

(*) *Voir* même tome, p. 231.

tions entières que les valeurs $w = \pm 1$ et $w = \pm 7$. Ces valeurs vérifient d'ailleurs l'équation (1); on en déduit $x = 0$ et $x = 24$. Ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2 = \frac{24.25.49}{6} = 4900.$$

II. Cette hypothèse conduit à l'équation

$$2v^2 - 3u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 3.

III. On déduit de cette décomposition l'équation

$$2w^2 - 6u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 2.

IV. On obtient aisément

$$w^2 + 1 = 6v^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

V. Cette hypothèse donne l'équation

$$4u^2 + 1 = 3w^2,$$

impossible suivant le module 3 ou le module 4.

VI. On trouve l'équation, impossible suivant le module 3,

$$6v^2 = u^2 + 1.$$

VII. On trouve de même l'impossibilité

$$3v^2 = u^2 + 1.$$

VIII. Cette hypothèse ne donne que la solution $x = 1$, d'après la remarque qui termine l'article précédent.

IX. On est conduit à l'impossibilité

$$2u^2 + 1 = 6w^2.$$

Ainsi, en résumé, la *somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour* $x = 24$.