NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LAISANT

Sur le centre de gravité d'un polygone

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 407-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__407_0>

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ D'UN POLYGONE ;

PAR M. A. LAISANT.

1. Soit ABC...L un polygone, et soit O un point quelconque du plan. Le centre de gravité G de l'aire du polygone peut s'obtenir en plaçant aux centres de gravité des triangles OAB, OBC, ..., OLA des masses proportionnelles à leurs aires respectives, et en prenant le centre de gravité de ces masses.

Si donc nous posons, en général, aire $OPQ = s_{p,q}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\text{OG aire ABC...L}\\
&\doteq \frac{OA + OB}{3} s_{a,b} + \frac{OB + OC}{3} s_{b,c} + \ldots + \frac{OL + OA}{3} s_{l,a}\\
&\doteq \frac{1}{3}\left[OA(s_{l,a} + s_{a,b}) + OB(s_{a,b} + s_{b,c}) + \ldots OL + (s_{k,l} + s_{l,a})\right].
\end{aligned}$$

Soient $s_{l.a} + s_{a,b} = \alpha$, $s_{a,b} + s_{b,c} = \beta$, ... les aires des quadrilatères OLAB, OABC, ... ; on a évidemment

$$\text{aire ABC...L} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

et l'expression ci-dessus devient

$$\frac{1}{2}OG(\alpha + \beta + \ldots + \lambda) = \frac{1}{3}(OA.\alpha + OB.\beta + \ldots + OL.\lambda).$$

Si maintenant nous plaçons en A, B, C. ... des masses respectivement proportionnelles à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, leur centre de gravité H sera donné par la relation

$$OH(\alpha + \beta + \ldots + \lambda) = OA.\alpha + OB.\beta + \ldots + OL.\lambda;$$

d'où, par comparaison,

$$OG \triangleq \frac{2}{3}\, OH,$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

On joint un point fixe à tous les sommets d'un polygone; à chaque sommet on place une masse proportionnelle au quadrilatère formé par ce sommet, les deux sommets voisins et le point fixe. Le centre de gravité de ces masses, celui de l'aire du polygone et le point fixe sont en ligne droite; et cette droite est divisée au tiers par le centre de gravité de l'aire du polygone.

2. Si l'on applique ce qui précède au quadrilatère, en choisissant pour le point O l'intersection des diagonales, on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} OH &\triangleq \frac{1}{2}\left(OA\,\frac{AO}{AC} + OB\,\frac{BO}{BD} + OC\,\frac{CO}{CA} + OD\,\frac{DO}{DB}\right) \\ &\triangleq \frac{1}{2}\left(\frac{OC^2 - OA^2}{OC - OA} + \frac{OD^2 - OB^2}{OD - OB}\right) \\ &\triangleq \frac{1}{2}\,(OC + OA + OD + OB) \end{aligned}$$

et

$$OG \triangleq \frac{1}{3}\,(OA + OB + OC + OD),$$

ce qui donne fort simplement cette propriété connue :

Le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère ABCD, *dont les diagonales se coupent en* O, *n'est autre que celui des masses* 1, 1, 1, 1, — 1, *placées respectivement en* A, B, C, D *et* O.

3. Supposons maintenant que O soit le foyer d'une ellipse, et que les points A, B, C, . . ., infiniment rapprochés, soient répartis sur le périmètre de cette ellipse,

de telle sorte que les triangles AOB, BOC, COD, . . ., soient équivalents.

Le point H sera évidemment à la limite le centre de gravité de la circonférence de l'ellipse, la répartition de la densité en chaque point résultant de la distribution des points A, B, C, ... Le point G ne sera autre que le centre de l'ellipse, à la limite, et nous aurons toujours

$$\mathrm{OG} \simeq \frac{2}{3}\,\mathrm{OH};$$

d'où

$$\mathrm{OH} \simeq \frac{3}{2}\,\mathrm{OG},$$

c'est-à-dire que le point H est *à moitié distance entre le centre de l'ellipse et le second foyer* O'.

Il est aisé de reconnaître que le problème que nous venons de résoudre ainsi n'est autre que celui-ci :

Une planète, dans sa révolution autour du Soleil, abandonne uniformément une quantité de matière qui se fixe sur la trajectoire. Quel est le centre de gravité de cette trajectoire matérielle, une fois la révolution accomplie?