Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 382-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__382_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 454

(voir 1re série, t. XVII, p. 434);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Dans une courbe plane du troisième degré, les trois sommets du triangle des asymptotes et les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion sont sur une même conique. (FAURE.)

Cette proposition, présentée d'une manière aussi générale, n'est pas exacte. Pour que la propriété énoncée soit vraie, il faut que la ligne droite qui joint les trois points d'inflexion considérés soit parallèle à celle qui passe par les trois points où la courbe rencontre ses asymptotes, ce qui n'a pas généralement lieu.

Avec cette hypothèse, voici comment on peut faire la démonstration :

Soient $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$ les équations des trois asymptotes et $L = 0$ celle de la droite qui joint les points où la courbe coupe ses asymptotes, l'équation de la courbe du troisième degré considérée prendra la forme

$$F = AA'A'' + mL = 0. \tag{1}$$

Soient, de même, $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ les équations des tangentes à trois points d'inflexion, en ligne droite, et $I = 0$ celle de la ligne qui joint ces points, F pourra se mettre sous cette autre forme :

$$F = KTT'T'' + pI^3 = 0. \tag{2}$$

Supposons maintenant que les lignes $L=0$ et $I=0$ soient parallèles et que, pour simplifier, l'axe des y ait été pris parallèlement à leur direction commune, on aura

$$F = AA'A'' + m(x+n) \mp KTT'T'' + p(x+q)^3,$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= aA'A'' + a'A''A + a''AA' \\ &= K(bT'T'' + b'T''T + b''TT'), \end{aligned}\right.$$

a, a', a'', b, b', b'' étant respectivement les coefficients de y dans les fonctions du premier degré A, A', A'', T, T' et T''.

Cela posé, l'équation

$$aA'A'' + a'A''A + a''AA' = 0$$

représente une conique qui passe par les trois sommets du triangle des asymptotes ; de même

$$bT'T'' + b'T''T + b''TT' = 0$$

est l'équation d'une conique passant par les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion ; mais, d'après la relation (3), ces deux courbes coïncident : donc les six points en question sont bien sur une même conique.

Remarque. — Les formes (1) et (2) de l'équation générale du troisième degré, formes qui peuvent facilement être établies antérieurement à toute notion acquise sur les courbes du troisième ordre, démontrent immédiatement les deux propriétés suivantes, qui sont connues et que l'on a admises dans la solution précédente :

1° Les trois points finis, où une courbe du troisième degré est coupée par ses asymptotes, sont en ligne droite.

2° Toute droite qui passe par deux points d'inflexion d'une courbe du troisième degré rencontre la courbe en un autre point d'inflexion.