AUGUSTE RIGHI

Nouveaux théorèmes de géométrie projective

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 241-249

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__241_0>

NOUVEAUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE (*);

PAR M. AUGUSTE RIGHI,
Professeur de Physique à l'Institut technique royal de Bologne.

1. THÉORÈME. — *Si deux systèmes de points se correspondent un à un dans l'espace sous les conditions suivantes :*

1° *Qu'il existe une droite dont tous les points soient leurs propres correspondants ;*

2° *Que tout plan passant par cette droite contienne les points correspondants des siens ou, ce qui est la même chose, tout plan passant par cette droite ait soi-même pour correspondant ;*

3° *Qu'aucun plan n'ait tous ses points pour propres correspondants ;*

Il existe certainement une seconde droite qui n'est pas dans un même plan avec la première, jouissant des mêmes propriétés (**).

Soient X la première droite, un point a et son correspondant a'; a, a' et X sont, par hypothèse, dans un même plan. Dans ce plan, chaque point de X a soi-même pour correspondant; en vertu d'un théorème connu, les droites qui joignent tout couple de points correspondants a, a' doivent se rencontrer dans un

(*) Extrait d'un appendice à un Mémoire *Sur la vision stéréoscopique* (*Nuovo Cimento*, 2e serie, t. XIV).

(**) Ce théorème est analogue à deux autres bien connus, où les points qui sont leurs propres correspondants sont distribués sur un plan, et deux points correspondants quelconques se trouvent sur les rayons d'un faisceau. (*Voir* le *Cours de Statique graphique* professe à Milan en 1868-69 par M. Cremona, p. 268.)

même point A, qui sera son propre correspondant. Par X menons deux autres plans, et soient B, C les points de ces plans analogues à A. Je dis que les points A, B, C sont en ligne droite. En effet, s'ils n'y étaient pas, ils détermineraient un plan qui couperait X en un point D. Et, comme dans ce plan il y aurait quatre points A, B, C, D, chacun desquels serait son propre correspondant, et dont il n'y aurait pas trois en ligne droite, par un théorème connu, tout point de ce plan devrait être son propre correspondant, ce qui est contraire à la troisième hypothèse. Il faut donc que A, B, C soient sur une même droite Y. Cette droite Y jouit des mêmes propriétés que X. En effet, tout point de Y est son propre correspondant (car cela se vérifie déjà pour trois de ses points A, B, C), et tout plan passant par Y est son propre correspondant, c'est-à-dire qu'il contient tous les points correspondants des siens; car à tout plan P passant par Y doit corrrespondre un plan passant par Y et par le point où P coupe X, c'est-à-dire le plan P lui-même.

Notre raisonnement prouve d'ailleurs qu'il n'existe pas, en dehors des droites X et Y, d'autres points qui soient leurs propres correspondants; ni, en dehors des plans menés par X et par Y, d'autres plans qui contiennent les points correspondants des leurs.

2. Si a est un point de l'un des systèmes, son correspondant a', devant se trouver à la fois dans le plan Xa et dans le plan Ya, sera sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la droite menée par a qui s'appuie sur X et Y.

3. Soit N le point où un plan mené par Y coupe X. A chaque point a de ce plan correspondra un point a'

situé sur la droite aN; de telle sorte que les figures formées par les points a et par les points a' seront deux figures planes homologiques, ayant N pour centre et Y pour axe d'homologie, et que le rapport anharmonique $\frac{Na}{Ma} : \frac{Na'}{Ma'}$ ou, d'après la notation en usage, $(NMaa')$, sera égal à une constante Δ. Par X, menons un plan quelconque : il coupera le premier plan YN suivant une droite NT, T étant situé sur Y. Dans ce nouveau plan, on aura également deux figures homologiques ayant T pour centre et X pour axe d'homologie, et, si l'on désigne par b et b' deux points homologues de ce plan, le rapport $(TVbb')$, V étant le point où bb' coupe X, sera aussi constant. Soient d'ailleurs c et c' deux points correspondants pris sur TN ; on aura, puisqu'ils font partie des deux plans,

$$(TNcc') = (TVbb') \quad \text{et} \quad (TNcc') = (MNaa');$$

donc

$$(TVbb') = (MNaa') \quad \text{ou} \quad (VTbb') = (NMaa') = \Delta.$$

Le rapport Δ est donc le même pour tout couple de points correspondants; par conséquent, pour trouver le point correspondant a' d'un point donné a, il suffit de mener par a la droite qui s'appuie sur X et sur Y et de construire le point a' tel que $(NMaa') = \Delta$. Je propose d'appeler ce mode particulier de correspondance *homologie à deux axes*; X et Y seront les *axes d'homologie* et Δ le *rapport caractéristique*. L'homologie ordinaire prendrait alors le nom d'*homologie centrale*.

4. Si nous regardons le point b comme appartenant au plan YV, les figures planes dont b et b' font partie seront homologiques, avec V pour centre et Y pour axe ;

on aura de plus

$$(\mathrm{VT}\,bb') = (\mathrm{NM}\,aa') = \Delta.$$

Cette remarque va nous conduire à une conception nouvelle de l'homologie à deux axes.

Que l'on construise, en effet, dans le plan YN, les figures homologiques ayant N pour centre, Y pour axe, et Δ pour rapport constant; que l'on mène par N une droite X, puis que, sur chaque plan passant par Y, comme YV, on trace les figures homologiques ayant Y pour axe, pour centre le point de rencontre V du plan avec X, et pour rapport Δ : on obtiendra ainsi deux systèmes de points correspondants constituant l'homologie à deux axes.

5. Sur chaque plan passant par Y, on a donc deux figures homologiques. Aux points infiniment éloignés de l'une correspondent les points d'une *droite limite*, parallèle à Y. Toutes ces droites forment deux *plans limites* parallèles à Y; chacun de ces plans est, dans l'un des systèmes, le lieu des points qui correspondent aux points infiniment éloignés de l'autre. Et, comme ce qui a lieu pour Y doit avoir aussi lieu pour X, les plans limites sont simultanément parallèles à X et à Y.

6. Lorsque deux systèmes de points forment une homologie à deux axes :

A toute droite qui coupe l'un des axes correspond une droite coupant cet axe au même point;

A toute droite qui rencontre les deux axes correspond la droite elle-même;

A toute droite parallèle à l'un des axes correspond une droite parallèle à cet axe;

A un plan quelconque correspond un plan coupant les axes aux mêmes points;

A un plan parallèle à un axe (ou aux deux axes) correspond un plan parallèle au même axe (ou aux deux axes).

Les droites qui joignent les points d'une droite d'un des systèmes aux points correspondants de l'autre sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe dont la droite donnée, sa correspondante et les deux axes appartiennent à l'autre système de génératrices de l'hyperboloïde; donc, à un hyperboloïde passant par les deux axes correspond l'hyperboloïde lui-même; et tandis que, dans l'homologie ordinaire, une droite est projetée par un plan, elle l'est ici par un hyperboloïde. Seulement, lorsque l'une des droites correspondantes, et par conséquent l'autre aussi, coupent l'un des axes, l'hyperboloïde devient un plan.

Les figures planes correspondantes quelconques ne sont pas la perspective l'une de l'autre; il ne faut pas les confondre non plus avec les figures obtenues par la *projection gauche* (*), avec lesquelles elles ont toutefois quelque analogie.

7. Si $\Delta = -1$, l'homologie à deux axes pourra s'appeler *harmonique*. Les deux plans limites coïncideront alors en un plan unique, qui sera situé à égale distance de chacun des axes. Les éléments des deux systèmes auront une double correspondance, c'est-à-dire que, si à un point a du premier correspond un point a' du second, au point a' considéré comme appartenant au premier correspondra a dans le second. Les points correspondants, qui seront sur une droite quelconque coupant les deux axes, formeront ici une involution du second ordre.

Les objets réels et les objets qu'on voit lorsqu'on re-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 385; 1865.

garde dans un pseudoscope de Wheatstone constituent deux systèmes homologiques harmoniques à deux axes, et les axes sont à angle droit. C'est en établissant la théorie de cet instrument que j'ai été conduit aux théorèmes qui forment l'objet de cette Note.

8. Si l'un des axes, X par exemple, est infiniment éloigné, comme une droite à l'infini détermine l'orientation d'un système de plans parallèles, les droites sur lesquelles se trouvent les couples des points correspondants seront parallèles à un même plan, dont X sera la droite de l'infini, et qu'on pourra appeler *plan directeur*. Dans ce cas, les droites sont projetées par des paraboloïdes, et les plans limites coïncident avec le *plan de l'infini*; et comme $(\mathrm{NM}aa')$ devient ici $(\infty\,\mathrm{M}aa')$, on aura $\Delta = \frac{a'\mathrm{M}}{a\mathrm{M}}$; c'est-à-dire que les distances de l'axe Y à deux points correspondants, comptées sur la droite aa', seront dans un rapport constant. Le cas actuel est donc analogue, soit à l'homothétie, soit à la similitude homologique; car tout plan passant par Y coupe les deux systèmes suivant deux systèmes plans homologiquement semblables, et tout plan parallèle au plan directeur, suivant deux figures homothétiques ayant leur centre sur Y. Si $\Delta = -1$, on a $a'\mathrm{M} = \mathrm{M}a$, et les deux systèmes sont symétriques par rapport à Y; symétrie oblique ou orthogonale, suivant l'angle que fait Y avec le plan directeur.

On doit remarquer que la similitude homologique par rapport à un plan ou à un point, la symétrie par rapport à un plan ou à un point, sont des cas particuliers de l'homologie ordinaire; mais on ne peut pas en déduire la symétrie de deux systèmes solides par rapport à un axe. L'homologie à deux axes comble cette lacune.

9. L'homologie à deux axes peut aussi être envisagée d'une autre manière. Que l'on prenne, sur une droite Y, deux points quelconques L et M, et que l'on forme le système Σ_2 homologique à un système donné Σ_1, en prenant L pour centre d'homologie centrale, le plan XM pour plan d'homologie (X étant une autre droite donnée), et un rapport anharmonique constant Δ : soit a_2 le point de Σ_2 correspondant à un point a_1 de Σ_1; puis que l'on construise le système Σ_3 homologique à Σ_2, en prenant M pour centre, XL pour plan d'homologie et toujours Δ pour rapport caractéristique : soit a_3 le point de Σ_3 qui correspond à a_2; je dis que les systèmes Σ_1 et Σ_3 forment une homologie à deux axes, ayant pour axes X et Y, et pour rapport anharmonique Δ. Soient, en effet, LN, MN les intersections des plans XL et XM avec le plan Ya_1, R le point où La_2a_1 coupe MN, S celui où Ma_2a_3 coupe LN; on aura $(LR\,a_1\,a_2) = (MS\,a_2a_3) = \Delta$. Les deux faisceaux $M(LR\,a_1\,a_2)$, c'est-à-dire formé des droites ML, MR, Ma_1, Ma_2, et $L(MS\,a_2\,a_3)$ seront donc projectifs; et comme ML est un rayon qui coïncide avec son correspondant, les autres couples de rayons correspondants se couperont sur une même ligne droite. Les points N, a_1, a_3 sont donc en ligne droite, ou, ce qui est la même chose, le point a_3 est sur la droite qui passe par a_1 et s'appuie sur X et Y. Soit T le point où cette droite rencontre Y. En outre, les points T, N, a_1, a_3 peuvent être considérés comme les projections des points M, S, a_2, a_3, faites de L sur NT; donc $(TN\,a_1\,a_3) = \Delta$. Ainsi les systèmes Σ_1 et Σ_3 forment une homologie à deux axes ayant pour rapport Δ. Pour former ce rapport $\Delta = (TN\,a_1\,a_3)$, on doit commencer par le point T qui appartient à celle des deux droites X et Y sur laquelle on a choisi les deux points M et N.

Si l'on avait pris pour M le point à l'infini sur Y, on aurait obtenu $\frac{Sa_3}{Sa_2} = \Delta$. Si $\Delta = -1$ et si M est à l'infini, on passe de Σ_1 à Σ_3 à l'aide de deux transformations, l'une homologique, l'autre symétrique.

10. Du théorème qui précède, on déduit aisément le suivant : Prenons quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, qui ne soient pas dans un même plan ; soit a_1 un point d'un système donné Σ_1. Construisons le système Σ_2, homologique à Σ_1, avec M_1 pour centre d'homologie, $M_2 M_3 M_4$ pour plan d'homologie et Δ pour rapport caractéristique ; soit a_2 le point de Σ_2 qui correspond à a_1. Formons de même le système Σ_3 homologique à Σ_2, en prenant M_2 pour centre, $M_3 M_4 M_1$ pour plan d'homologie et Δ pour rapport; soit a_3 le point de Σ_3 qui correspond à a_2. En vertu du théorème précédent, les points a_3 et a_1 seront sur une même droite NT qui rencontrera les droites $M_3 M_4$ et $M_1 M_2$ en N et T, et $(\mathrm{TN}\, a_1\, a_3)$ sera égal à Δ.

Formons de même le système Σ_4 homologique à Σ_3, en prenant M_3 pour centre, $M_4 M_1 M_2$ pour plan et Δ pour rapport d'homologie; soit a_4 le point de Σ_4 qui correspond à a_3. Formons enfin le système Σ_5 homologique à Σ_4, avec M_4 pour centre, $M_1 M_2 M_3$ pour plan d'homologie, et toujours Δ pour rapport caractéristique; je dis que Σ_5 n'est que le système primitif Σ_1. En effet, soit, pour un moment, a_5 le point de Σ_5 qui correspond à a_4. Les points a_3 et a_5, en vertu du théorème précédent, doivent se trouver sur une même droite qui rencontre $M_3 M_4$ et $M_1 M_2$; a_5 sera donc sur NT. On doit aussi avoir $(\mathrm{NT}\, a_3\, a_5) = \Delta$; mais $(\mathrm{TN}\, a_1\, a_3) = (\mathrm{NT}\, a_3 a_1) = \Delta$; donc a_5 coïncide avec a_1 et Σ_5 avec Σ_1. On peut énoncer ce théorème de la manière suivante : *Étant donné un système quelconque, si l'on construit successivement les systèmes homologiques, avec les sommets d'un té-*

traèdre, pris dans un ordre quelconque, pour centres d'homologie, les plans des faces opposées pour plans d'homologie, et un rapport anharmonique caractéristique constant, on retombe sur le système primitif.

Si un, deux, ou trois des points M_1, M_2, M_3, M_4 sont infiniment éloignés, on obtient trois théorèmes faciles à énoncer. Si M_4 et a_1 sont dans le plan $M_1 M_2 M_3$, on arrive à un théorème relatif au triangle dans le plan, analogue au théorème que je viens de démontrer pour le tétraèdre dans l'espace.

Tous les théorèmes qui précèdent peuvent s'établir par l'Analyse. Mais je renvoie pour cela le lecteur au Mémoire original.