PH. GILBERT

Sur un problème de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 152-156

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__152_0>

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

La solution de la question de Mécanique rationnelle proposée au concours d'Agrégation de 1873, solution publiée dans le numéro de novembre 1874 des *Nouvelles Annales* (2e série, t. XIII, p. 507), n'est pas exacte. Comme je ne crois pas que le fait ait été signalé jusqu'ici, il sera peut-être utile de rectifier ce qu'elle a d'erroné.

L'auteur détermine le centre de gravité G de l'anneau et de la masse fixée à sa circonférence; puis il conclut, sans autre démonstration, que le mouvement du point G est celui d'un point pesant de masse $\mu = M + m$, mobile sur une circonférence tournant autour d'un diamètre vertical avec une vitesse constante ω. Il se borne donc à déterminer ce dernier mouvement.

L'assimilation n'est pas justifiée et conduit, en fait, à un résultat inexact. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que le rayon $l = \frac{MR}{M+m}$ de la circonférence, dans le problème simplifié, s'évanouit lorsque la masse

Poncelet, de Méry, de Cousinery et de divers autres géomètres ou ingénieurs figurent honorablement dans l'histoire de la *Statique graphique* et du *Calcul graphique*, qui en est une des branches (*voir*, outre les ouvrages qui viennent d'être cités, l'historique publié à Leipzig, par M. Weyrauch, en 1874, sous le titre *Ueber die graphische Statik*).

Citons aussi *La Statique graphique* de M. Maurice Levy (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

additionnelle M devient nulle, et l'intégrale de l'équation (1), savoir

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\cos\theta + \omega^2\sin^2\theta + C,$$

donne

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \infty,$$

ce qui est absurde. En traitant directement le problème proposé, nous reconnaîtrons d'ailleurs en quoi pèche la solution.

Soit pris pour axe OZ l'axe vertical BB' dans le sens de la pesanteur, le plan XY passant par le centre O de l'anneau. Prenons un système de comparaison mobile autour de OZ avec la vitesse angulaire ω, et ayant pour axe OX le diamètre horizontal AA' autour duquel l'anneau peut basculer. Soient a le rayon de l'anneau, θ l'angle que fait OC avec l'axe OZ. Appliquons le théorème des forces vives au mouvement relatif de l'anneau et de la masse M par rapport au système de comparaison. La force vive relative de l'anneau, dont le mouvement relatif est une rotation autour de AA', a pour expression $\frac{ma^2}{2}\frac{d\theta^2}{dt^2}$; celle de la masse M, $Ma^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$. On a donc

$$\sum mv_r^2 = \left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Le travail des forces centrifuges composées étant nul, il suffit d'ajouter au travail des forces motrices celui des forces centrifuges de tous les points, dues à la rotation du système de comparaison autour de OZ. Or le poids de l'anneau est détruit par la fixité du point O; le travail élémentaire du poids M est exprimé par

$$Mg\,d.a\cos\theta = Mga\,d\cos\theta.$$

D'autre part, on trouve par un calcul facile, en désignant par r la distance d'un élément dm de l'anneau à l'axe vertical, par ζ l'angle que fait avec OX le rayon mené du point O à cet élément, que la force centrifuge de l'élément dm est $\omega^2 r dm$; que l'arc élémentaire qu'il décrit pendant le temps dt est $a \sin\zeta d\theta$, et le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et celle de la vitesse relative $\frac{a \sin\zeta \sin\theta \cos\theta}{r}$; le travail élémentaire relatif de la force centrifuge de l'élément dm est donc égal à

$$\omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta \times a^2 \sin^2\zeta dm,$$

et la somme de ces travaux pour l'anneau entier a pour expression

$$\frac{ma^2}{2} \omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta.$$

De même, la force centrifuge de la masse M développe un travail élémentaire relatif égal à $Ma^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$, que l'on doit ajouter au précédent. L'équation des forces vives donnera donc

$$\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2Mga\cos\theta + \left(M + \frac{m}{2}\right) a^2\omega^2 \sin^2\theta + \text{const.},$$

ou, si l'on divise par $\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2$, et si l'on pose $l = \frac{2M + m}{2M} a$,

$$(\alpha) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l} \cos\theta + \omega^2 \sin^2\theta + C.$$

Cette équation coïncide avec l'intégrale de l'équation (1) de l'article cité, et la suite de la discussion peut se faire d'une manière toute semblable; la différence entre les deux solutions consiste dans la signification de la constante l qui, pour nous, est égale à $\frac{(2M + m)}{2M} a$ et non à

$\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}+m}$, et se réduit, pour $\mathrm{M}=0$, à l'infini et non à zéro. Il suit de là que, si la masse additionnelle M manque, l'équation du mouvement de l'anneau se réduit à

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\omega^2\sin^2\theta+\mathrm{C},$$

ce qui est conforme à la réalité. Les deux positions d'équilibre correspondent dans ce cas à $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Je remarquerai d'ailleurs que la solution du problème proposé peut aussi se déduire, par les simplifications convenables, des équations générales du mouvement relatif d'un corps solide fixé par un point O, par rapport à un système d'axes OXYZ dont le mouvement est connu, équations que je donnerai dans mon *Cours de Mécanique*. L'équation des moments autour de l'axe OX est, en général, celle-ci :

$$\begin{aligned}
&\frac{d.\mathrm{H}_x(p+p_1)}{dt}-\left(\frac{dq_1}{dt}-p_1r_1\right)\Sigma mxy-\left(\frac{dr_1}{dt}+p_1q_1\right)\Sigma mxz\\
&\quad+(r_1^2-q_1^2-2qq_1+2rr_1)\Sigma myz-\mathrm{H}_x(qr_1+rq_1)\\
&\quad+(\mathrm{H}_z-\mathrm{H}_y)(qr_1+rq_1+q_1r_1)\\
&\quad-2\mathrm{M}(\mathrm{V}_x-qz_1+ry_1)(q_1y_1+r_1z_1)\\
&\quad-\frac{d}{dt}(q\Sigma mxy+r\Sigma mxz)\\
&\quad+\mathrm{M}\frac{dt}{d}[y_1\mathrm{V}_z-z_1\mathrm{V}_y+qx_1y_1+rx_1z_1-p(y_1^2+z_1^2)]=\mathrm{G}_x.
\end{aligned}$$

H_x, H_y, H_z sont les moments d'inertie du solide par rapport aux axes mobiles OX, OY, OZ, à l'époque t; p_1, q_1, r_1 les composantes de la rotation instantanée du système de comparaison suivant ces mêmes axes, et p, q, r celles de la rotation relative du solide; M la masse du corps; x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives de son centre de gravité, et V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse relative de ce centre; G_x la projection sur l'axe OX de l'axe du couple résultant des forces extérieures. Appliquant cette équation au problème actuel, on voit sans peine que l'on aura

$$H_x = \left(M + \frac{m}{2}\right)a^2, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{Ma\sin\theta}{M+m},$$

$$z_1 = -\frac{Ma\cos\theta}{M+m}, \quad \Sigma myz = -\left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \omega,$$

$$p = \frac{d\theta}{dt}, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad G_x = -Mga\sin\theta,$$

$$V_x = 0, \quad V_y = \frac{Ma\cos\theta}{M+m}\frac{d\theta}{dt}, \quad V_z = \frac{Ma\sin\theta}{M+m}\frac{d\theta}{dt}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale; nous trouverons, réductions faites,

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = -Mga\sin\theta.$$

L'intégration de cette équation nous ramène à l'équation (α).

Pour finir, j'observe qu'il serait intéressant d'examiner ce que devient la question lorsque le système, au lieu d'avoir un mouvement angulaire déterminé et constant autour de la verticale BB', peut tourner librement autour de cet axe avec une vitesse variable dépendant des conditions initiales et de la rotation autour de la charnière.