

ÉDOUARD LUCAS

**Questions nouvelles d'arithmétique  
supérieure**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 82-83

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_82\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__82_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**QUESTIONS NOUVELLES D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE**

 PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS.
 

---

1. Déterminer le dernier chiffre du  $n^{\text{ième}}$  terme de la série de Lamé donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et les conditions initiales  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .

2. Formuler les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux termes donnés de la série  $u_p$  et  $u_q$  en fonction des rangs  $p$  et  $q$ .

3. Traiter les mêmes questions pour la série

$$0, 1, 2, 5, 12, \dots,$$

donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n,$$

et plus généralement pour les séries récurrentes du premier genre données par la loi

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

dans laquelle  $a$  et  $b$  désignent des nombres premiers entre eux.

4. Trouver l'expression générale du terme de la série en supposant  $u_0 = 0, u_1 = 1$ , quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ .

5. Si  $p$  désigne un nombre premier, et  $u_p$  l'expression

$$u_p = \frac{(a + \sqrt{b})^{p+1} - (a - \sqrt{b})^{p+1}}{\sqrt{b}},$$

démontrer que  $u_{p+1}$  est divisible par  $p$ , si  $b$  désigne un non-résidu quadratique de  $p$ ; et que  $u_{p-1}$  est divisible par  $p$ , en exceptant les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $a^2 - b$  est divisible par  $p$ , si  $b$  désigne un résidu quadratique de  $p$ .

La première partie de ce théorème est due à Gauss.

### 6. Résoudre complètement l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$

en nombres entiers. Euler et Legendre n'ont pas donné toutes les solutions, et généralement celles pour lesquelles  $z$  est pair; ainsi, par exemple,

$$x = 919, \quad y = -271, \quad z = 438.$$

### 7. Résoudre complètement l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3$$

en nombres entiers. Fermat, qui avait particulièrement étudié cette équation, n'a pas donné les solutions pour lesquelles  $z$  est pair; ainsi

$$x = 73, \quad y = -17, \quad z = 38,$$

ce qui semble indiquer qu'il n'était point en possession de la méthode générale.

### 8. Résoudre complètement l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n-1)^2 = y^2,$$

pour les valeurs de  $n$  égales à 2, 11, 23, 24.

9. Démontrer, sans se servir de la Table des nombres premiers, que  $2^{31} - 1$  est un nombre premier.