Nouvelles annales de mathématiques

Édouard Lucas

Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 497-499

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__497_0>

SUR LES RAPPORTS QUI EXISTENT ENTRE LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL ET LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Si l'on désigne par S_n la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres entiers, on tire de la formule

$$(x-1)^n = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} - \ldots,$$

en y faisant successivement x égal à 1, 2, 3, ..., x, et en additionnant, la formule symbolique

$$x^n = S^n - (S-1)^n. \tag{1}$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned}
+x &= S_0,\\
-x^2 &= S_0 - 2S_1,\\
+x^3 &= S_0 - 3S_1 + 3S_2,\\
-x^4 &= S_0 - 4S_1 + 6S_2 - 4S_3,\\
+x^5 &= S_0 - 5S_1 + 10S_2 - 10S_3 + 5S_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On en déduit, par exemple,

$$1.2.3.4.5.S_4 = \begin{vmatrix} +x & 1 & 0 & 0 & 0\\ -x^2 & 1 & 2 & 0 & 0\\ +x^3 & 1 & 3 & 3 & 0\\ -x^4 & 1 & 4 & 6 & 4\\ +x^5 & 1 & 5 & 10 & 10 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Les coefficients du second membre sont entiers, et l'on voit que, en général, S_n est divisible par le produit $x(x+1)$.

En posant, symboliquement,

$$(3) \qquad nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

et en remplaçant dans le second membre les exposants de B par des indices, on obtient les nombres de Bernoulli. La comparaison de cette formule avec la précédente conduit immédiatement à l'expression générale du nombre B_n, sous la forme d'un déterminant d'ordre quelconque, égal ou supérieur à n, et formé au moyen du triangle arithmétique.

2. On peut exprimer les sommes S, et par suite les nombres B, au moyen de fonctions entières quelconques, de la manière suivante :

Soit la fonction

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}x^n + a_{i,1}x^{n-1} + \ldots + a_{i,n};$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ..., x, et en additionnant, il vient

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}S_n + a_{i,1}S_{n-1} + \ldots + a_{i,n}S_0.$$

En considérant $n+1$ fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$, on en déduit S_{n-i} et, par suite, B_{n-i} au moyen de déterminants du $n^{ième}$ ordre. On peut obtenir encore les expressions de S et de B par des déterminants d'ordre moitié moindre, en se servant des formules symboliques

$$(x+1)^n + x^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n,$$
$$(x+1)^n - x^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n,$$
$$(2x+1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux. On déduit, par exemple, de la dernière, en posant $2x + 1 = y$,

$$
2^{2n+1}\,1.3.5\ldots(2n+1)\,S_{2n}
= \begin{vmatrix}
y^{2n+1} & 1 & C_{2n+1}^{2} & C_{2n+1}^{4} & \ldots & C_{2n+1}^{2n-4} & C_{2n+1}^{2n-2} \\
y^{2n-1} & 1 & C_{2n-1}^{2} & C_{2n-1}^{4} & \ldots & C_{2n-1}^{2n-4} & C_{2n-1}^{2n-2} \\
\ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y^{5} & 1 & C_{5}^{2} & C_{5}^{4} & \ldots & 0 & 0 \\
y^{3} & 1 & C_{3}^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.
$$

On voit ainsi immédiatement que S_{2n} est divisible par $2x+1$, et, par suite, par S_2; de plus, S_{2n} est une fonction impaire de $2x + 1$.

3. Enfin, si l'on se sert de la formule symbolique

$$f(B+1) - f(B) = f'(0),$$

ou même des formules plus générales que j'ai présentée à l'Académie des Sciences (*), on peut obtenir très-facilement l'expression de B_n au moyen de coefficients quelconques, ou même au moyen de déterminants dont les différents termes contiennent les nombres de Bernoulli, ou leurs produits deux à deux, trois à trois, etc.