

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 451-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__451_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Autres définitions géométriques des indices.

Des théorèmes démontrés précédemment on peut déduire diverses définitions géométriques de l'indice d'un système composé de deux points, de deux droites et de deux plans. Nous en signalons quelques-unes dans les paragraphes suivants, en nous bornant souvent à indiquer seulement la démonstration (*).

Indice du système de deux points e, e' .

46. Deux points e, e' étant donnés, menons par le premier une droite ε rencontrant la surface S aux points a, b ; par le second, menons une parallèle à ε ,

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339.

(**) Nous avons donné, t. XI, 1872, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, plusieurs définitions des indices.

et désignons par a' , b' les points où cette parallèle rencontre les plans tangents aux points a , b . Si ε est la longueur du demi-diamètre parallèle à la droite ε , on a

$$I_{ee'} = \frac{ea \cdot e'b' + eb \cdot e'a'}{2\varepsilon^2}.$$

Cette relation se déduit de la relation à quatre termes du n° 15.

Lorsque le point e' coïncide avec le point e ,

$$I_e = \frac{ea \cdot eb}{\varepsilon^2}.$$

47. Si par la droite ee' on mène un plan qui touche la surface S au point a , et que l'on désigne par E , E' les plans diamétraux oae , oae' ,

$$I_{ee'} = -4oae \cdot oae' I_{EE'}.$$

Car, le point o étant le centre de la surface S , on a, par définition,

$$\begin{vmatrix} o & a & e \\ o & a & e' \end{vmatrix} = 4oae \cdot oae' I_{EE'},$$

et l'on voit de suite que le déterminant se réduit à $-I_{ee'}$.

Lorsque le point e' coïncide avec le point e ,

$$I_e = -4oae^2 I_E;$$

le point a est le point de contact d'un plan tangent de S mené par le point e .

Indice du système de deux droites.

48. Si l'on désigne par a la trace de la droite ε sur le plan diamétral conjugué à la droite ε' , et par a' la

trace de la droite ϵ' sur le plan diamétral conjugué à la droite ϵ , l'indice du système des droites ϵ, ϵ' , pris en signe contraire, est égal à l'indice du système des points a, a' multiplié par l'indice du système des diamètres parallèles aux droites données.

Ce théorème se déduit de la définition n° 1 en prenant les points b, b' à l'infini et ayant égard au théorème du n° 11.

49. La droite ϵ rencontrant la surface S aux points a, b , menons les plans tangents A, B en ces points et désignons par a', b' les traces de ces plans sur la droite ϵ' . Si ϵ est la longueur du demi-diamètre parallèle à la droite ϵ ,

$$I_{\epsilon\epsilon'} = - \frac{ab \cdot a'b'}{4\epsilon^4} \frac{\sin \epsilon' A \sin \epsilon' B}{\sin \epsilon A \sin \epsilon B}.$$

D'après la définition, on a en effet, puisque $I_{aa'} = I_{bb'} = 0$,

$$ab \cdot a'b' I_{\epsilon\epsilon'} = - I_{ab'} I_{ba'};$$

mais, d'après le n° 46,

$$I_{ab'} = \frac{ab \cdot b'a'}{2\epsilon^2} \frac{\sin \epsilon' A}{\sin \epsilon A}, \quad I_{ba'} = \frac{ba \cdot a'b'}{2\epsilon^2} \frac{\sin \epsilon' B}{\sin \epsilon B}.$$

Lorsque la droite ϵ' coïncide avec ϵ ,

$$I_{\epsilon} = - \frac{ab}{4\epsilon^4}.$$

Si l'on mène le diamètre op qui rencontre au point p le plan tangent au point a , on a

$$I_{\epsilon} = - \frac{1}{op},$$

car il est visible que $\epsilon^2 = op \frac{ab}{2}$.

50. Par la droite ε menons les plans tangents A, B à la surface S, et soient A, B les produits des demi-axes des sections diamétrales parallèles aux plans tangents. Si l'on désigne par A', B' les plans menés par la droite ε' et les points de contact a, b des plans A, B,

$$I_{\varepsilon'} = \frac{(a, \varepsilon')(b, \varepsilon')}{A \cdot B} \frac{\sin A' B'}{\sin AB};$$

D'après la relation 4^o du n^o 8, on a, puisque $I_{AA'} = I_{BB'} = 0$,

$$I_{AB'} I_{BA'} = \frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A' B' I_{\varepsilon'}.$$

Or

$$I_{AB'} = \frac{(o, A)(a, B')}{\pi^2} = \frac{(a, B')}{\pi A} = \frac{(a, \varepsilon') \sin A' B'}{\pi A},$$

$$I_{BA'} = \frac{(b, \varepsilon') \sin A' B'}{\pi B}.$$

Lorsque la droite ε' coïncide avec ε ,

$$I_{\varepsilon} = \frac{(a, \varepsilon)^2}{A^2},$$

parce que

$$\frac{(a, \varepsilon)}{A} = \frac{(b, \varepsilon)}{B}.$$

Indice du système de deux plans E, E'.

51. Si l'on désigne par a la trace du plan E sur le diamètre conjugué au plan E', par a' la trace du plan E' sur le diamètre conjugué au plan E, l'indice du système des plans E, E', pris en signe contraire, est égal à l'indice du système des points a, a' multiplié par l'indice du système des plans diamétraux parallèles aux plans E, E'.

Ce théorème se déduit de la définition, en prenant les points b, c, b', c' à l'infini et ayant égard à la relation du n^o 12.

52. Traçons dans le plan E une droite arbitraire, et soient A, B les plans tangents de la surface S menés par cette droite, a, b les points de contact. Menons le plan diamétral N qui passe par la droite arbitraire, et appelons A', B' les plans qui passent par la droite NE' et les points de contact a, b. Si N est le produit des demi-axes de la section diamétrale déterminée par le plan N,

$$I_{EE'} = - \left(\frac{\sin EA \sin E' B'}{\sin NA \sin NB'} + \frac{\sin EB \sin E' A'}{\sin NB \sin NA'} \right) \frac{1}{2 N^2},$$

$$I_{EE'} = \frac{1}{2 N^2} \frac{(a, E)(b, E') + (b, E)(a, E')}{(a, N)(b, N)}.$$

La première relation se déduit de celle à quatre termes du n° 19. Nous avons en effet, puisque $I_{AA'} = I_{BB'} = 0$,

$$I_{EE} = - \frac{\sin EB \sin E' A' I_{AB'} + \sin EA \sin E' B' I_{BA'}}{\sin AB \sin A' B'}.$$

Or on voit que

$$I_{AB'} = \frac{1}{2 N^2} \frac{\sin AB \cdot \sin A' B'}{\sin NB \cdot \sin NA'}, \quad I_{BA'} = \frac{1}{2 N^2} \frac{\sin AB \cdot \sin A' B'}{\sin NA \cdot \sin NB'}.$$

La seconde est une conséquence de la première.

Lorsque la droite arbitraire prise dans le plan E est à l'infini, ab devient le diamètre conjugué à la direction de ce plan et

$$\pi^2 = - N^2 (a, N) (b, N);$$

le plan N est parallèle au plan E; de là cette relation :

Deux plans E, E' étant donnés, menons le diamètre ab de la surface S, conjugué à la direction de l'un d'eux; les points a, b étant les points d'intersection de la surface avec ce diamètre,

$$I_{EE} = \frac{(a, E)(b, E') + (a, E')(b, E)}{2 \pi^2}.$$

Si le plan E' coïncide avec le plan E ,

$$I_E = \frac{(E, A)(E, B)}{\pi^2},$$

en désignant par (E, A) , (E, B) les distances du plan E aux plans tangents A, B parallèles au plan E .

Comme on a aussi

$$(E, A)(E, B) = (o, E)^2 - (o, A)^2,$$

et que $\pi = (o, A)E$, E désignant le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan E , on peut écrire

$$I_E = \frac{(o, E)^2}{\pi^2} - \frac{1}{E^2}.$$

On déduit de là cette autre définition :

L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal au produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan divisé par le cube du produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan.

53. *L'intersection des plans E, E' coupant la surface S au point a , menons le plan tangent A en ce point, si α, α' sont les diamètres de la surface parallèles aux tangentes menées au point a aux sections faites par les plans E, E' , on a*

$$I_{EE'} = \frac{\sin EA \sin E'A}{(o, A)^2} I_{\alpha\alpha'}.$$

Soient P un plan quelconque, e, e' les points d'intersection de ce plan avec les droites AE, AE' , on a (8)

$$\begin{vmatrix} P & A & E \\ P & A & E' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi'} \sin PAE \sin PAE' I_{ee'}.$$

Or le déterminant se réduit à $-I_{EE'} I_{AP}^2$, puisque

$$I_{AA} = I_{AE} = I_{AE} = 0,$$

et l'on a

$$I_{AP} = \frac{(o, A)(a, P)}{\pi^2},$$

avec $(a, P) = ae \sin \alpha P = ae' \sin \alpha' P$. D'ailleurs

$$\sin PAE = \sin AE \cdot \sin \alpha P, \quad \sin PAE' = \sin AE' \cdot \sin \alpha' P,$$

et par conséquent

$$I_{EE'} = - \frac{\sin AE \cdot \sin AE'}{(o, A)^2} \frac{I_{ee'}}{ae \cdot ae'}.$$

Or, lorsque le plan P s'éloigne à l'infini,

$$\frac{I_{ee'}}{ae \cdot ae'} = - I_{aa'};$$

d'où résulte la relation indiquée.

Si le plan E' coïncide avec E,

$$I_E = \frac{\sin^2 EA}{(o, A)^2} I_a.$$

Le plan A est alors un plan tangent de la surface S mené en un quelconque des points d'intersection de la surface avec le plan E, et α est le diamètre parallèle à la tangente EA.

§4. En représentant par

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \rho} + \frac{y^2}{\beta^2 + \rho} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \rho} = 1$$

l'équation générale des surfaces homofocales à la surface S dont l'équation est $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, nous dirons que ρ est le paramètre de cette homofocale, et nous la désignerons elle-même par cette lettre ρ .

La considération des paramètres des homofocales de

la surface S donne une nouvelle interprétation géométrique des indices.

Indice du système des points e, e' par rapport à S .
— Traçons l'homofocale ρ de S qui est conjuguée aux deux points e, e' ; par rapport à cette surface, l'indice du système des points e, e' sera nul. Or, si $xyz, x'y'z'$ sont les coordonnées des deux points, l'indice du système des deux points sera

$$\frac{xx'}{\alpha^2 + \rho} + \frac{yy'}{\beta^2 + \rho} + \frac{zz'}{\gamma^2 + \rho} - 1 = 0.$$

Chassant le dénominateur, on a l'équation

$$\rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C = 0,$$

en posant

$$A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - xx' - yy' - zz',$$

$$B = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2)xx' \\ - (\gamma^2 + \alpha^2)yy' - (\alpha^2 + \beta^2)zz',$$

$$C = -\alpha^2\beta^2\gamma^2 \left(\frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} + \frac{zz'}{\gamma^2} - 1 \right) = -\pi^2 I_{ee'}.$$

Si donc ρ_1, ρ_2, ρ_3 désignent les paramètres des trois surfaces homofocales de S , qui sont conjuguées aux points e, e' , l'indice du système de ces points est donné par la relation $I_{ee'} = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\pi^2}$.

L'indice du système des points e, e' par rapport à la surface S est égal au produit des paramètres des trois homofocales de S qui sont conjuguées aux points e, e' , divisé par le produit des carrés des demi-axes de S .

Indices du système des deux droites $\varepsilon, \varepsilon'$ par rapport à S .

Si l'on désigne par $xyz, x_1y_1z_1$ les coordonnées des

deux points e, f de la droite ε , par $x'y'z', x'_1y'_1z'_1$ les coordonnées de deux points e', f' de la droite ε' , l'indice du système de ces droites, par rapport à la surface S rapportée à ses axes, est donné par la relation

$$ef \cdot e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \left| \begin{array}{cc} x & x_1 \\ y & y_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{array} \right| \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \\ - \sum \left| \begin{array}{cc} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{array} \right| \frac{1}{\gamma^2}.$$

Cette relation résulte de la définition : nous la donnons plus loin (85).

Traçons une surface ρ homofocale à S et conjuguée aux droites $\varepsilon, \varepsilon'$. L'indice du système de ces droites par rapport à ρ étant nul, nous avons

$$0 = \sum \left| \begin{array}{cc} x & x_1 \\ y & y_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{array} \right| (\gamma^2 + \rho) \\ - \sum \left| \begin{array}{cc} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{array} \right| (\alpha^2 + \rho)(\beta^2 + \rho)$$

ou

$$A\rho^2 + B\rho + C = 0,$$

en posant

$$A = \sum \left| \begin{array}{cc} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{array} \right|,$$

$$B = \sum \left| \begin{array}{cc} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{array} \right| (\alpha^2 + \beta^2) - \sum \left| \begin{array}{cc} x & x_1 \\ y & y_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{array} \right|,$$

$$C = \sum \left| \begin{array}{cc} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{array} \right| \alpha^2 \beta^2 - \sum \left| \begin{array}{cc} x & x_1 \\ y & y_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{array} \right| \gamma^2.$$

Si ρ_1, ρ_2 sont les racines de cette équation,

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{C}{A}.$$

Or

$$A = ef \cdot e'f' \cos \varepsilon \varepsilon',$$

$$C = - \pi^2 ef \cdot e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'};$$

par conséquent

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = - \frac{\rho_1 \rho_2 \cos \varepsilon \varepsilon'}{\pi^2}.$$

L'indice du système des droites $\varepsilon\varepsilon'$ par rapport à la surface S est égal et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales de S qui sont conjuguées aux droites $\varepsilon\varepsilon'$, multiplié par le cosinus de l'angle de ces droites et divisé par le carré du produit des demi-axes de S.

Indice du système des deux plans E, E' par rapport à S.

Soient

$$ax + by + cz = p, \quad a'x + b'y + c'z = p'$$

les équations des deux plans exprimés au moyen de la distance de ces plans au centre de S et des cosinus des angles que forment ces distances avec les axes de S. On aura

$$\pi^2 I_{EE'} = pp' - aa' \cdot \alpha^2 - bb' \cdot \beta^2 - cc' \cdot \gamma^2.$$

Traçons une surface ρ homofocale à S et conjuguée aux deux plans E, E'; l'indice du système de ces plans, pris par rapport à ρ , étant nul, nous aurons

$$0 = pp' - aa'(\alpha^2 + \rho) - bb'(\beta^2 + \rho) - cc'(\gamma^2 + \rho),$$

d'où

$$\pi^2 I_{EE'} - \rho \cos EE' = 0$$

et

$$I_{EE'} = \frac{\rho \cos EE'}{\pi^2}.$$

L'indice du système des deux plans E, E' par rapport à la surface S est égal au paramètre de l'homofocale de S conjuguée aux deux plans, multiplié par le cosinus de l'angle de ces plans et divisé par le carré du produit des demi-axes de S.

Comme corollaires, nous déduisons ces théorèmes :

L'indice du point e par rapport à S est égal au produit des paramètres des trois homofocales de S qui passent au point e divisé par π^2 .

L'indice de la droite ε par rapport à S est égal et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales de S qui touchent la droite ε divisée par π^2 .

L'indice du plan E par rapport à S est égal au paramètre de l'homofocale de S qui touche le plan divisé par π^2 .

Théorèmes relatifs à deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à la surface S et à des systèmes correspondants.

Lorsque les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à la surface S , les sommets a , b , c , d du premier ont pour plans polaires les faces A' , B' , C' , D' du second et les sommets a' , b' , c' , d' de ce dernier ont pour plans polaires les faces A , B , C , D du premier; de plus les arêtes α , β , γ , λ , μ , ν ont pour polaires les arêtes λ' , μ' , ν' , α' , β' , γ' .

Chaque sommet de l'un des tétraèdres étant conjugué à trois sommets de l'autre, il n'y a que les indices des systèmes de points aa' , bb' , cc' , dd' qui ne sont pas nuls. De même les indices des systèmes de plans AA' , BB' , CC' , DD' et des systèmes de droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$, sont seuls différents de zéro.

Étant donnés deux groupes de points a , b , c , d , a' , b' , c' , d' et la surface S (les points étant au plus au nombre de quatre), si le point a est conjugué à tous les points du second groupe sauf le point a' , et si en même temps le point a' est conjugué à tous les points du pre-

mier groupe, sauf le point a , nous dirons que les points a, a' sont *correspondants*. Les plans polaires de deux points correspondants déterminent des plans correspondants. Deux segments, deux triangles correspondants sont déterminés par deux ou trois groupes de points correspondants. Deux dièdres, deux trièdres correspondants sont déterminés par deux ou trois groupes de plans correspondants.

Ces systèmes correspondants sont faciles à construire ; si l'on veut, par exemple, déterminer un triangle correspondant au triangle abc , on tracera les plans polaires A', B', C' des trois sommets et l'on coupera le trièdre ainsi formé par un plan quelconque ; la section est un triangle correspondant au triangle abc .

En d'autres termes, on voit que deux systèmes correspondants sont des éléments constitutifs de deux certains tétraèdres polaires réciproques par rapport à la surface S .

A l'aide des théorèmes énoncés aux nos 15, 18 et 19 ou bien au moyen des valeurs trouvées par X_r (21) et x_r (22), on déduit les conséquences suivantes :

55. *Deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à la surface S , l'indice du système des points e, e' est donné par la relation*

$$-\pi^2 I_{ee'} = \frac{(e, A)(e', A')}{I_{AA'}} + \frac{(e, B)(e', B')}{I_{BB'}} + \frac{(e, C)(e', C')}{I_{CC'}} + \frac{(e, D)(e', D')}{I_{DD'}}$$

ou par la suivante, qui ne contient que des indices :

$$I_{ee'} = \frac{I_{ae'} I_{ea'}}{I_{aa'}} + \frac{I_{be'} I_{eb'}}{I_{bb'}} + \frac{I_{ce'} I_{ec'}}{I_{cc'}} + \frac{I_{de'} I_{ed'}}{I_{dd'}}$$

Deux triangles $abc, a'b'c'$ étant correspondants par

rapport à la surface S , si l'on prend dans le premier un point e , dans le second un point e' ,

$$I_{ee'} = \frac{(e, \alpha)(e', \alpha')}{(a, \alpha)(a', \alpha')} I_{aa'} + \frac{(e, \beta)(e', \beta')}{(b, \beta)(b', \beta')} I_{bb'} + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma')}{(c, \gamma)(c', \gamma')} I_{cc'}.$$

Deux segments ab , $a'b'$ étant correspondants par rapport à la surface S , si l'on prend sur le premier un point e , sur le second un point e' ,

$$I_{ee'} = \frac{eb \cdot e'b' I_{aa'} + ea \cdot e'a' I_{bb'}}{ab \cdot a'b'}.$$

Remarque. — Si l'on prend pour le point e le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre $abcd$, et pour le point e' le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$, et si ces points sont tels que les deux sphères touchent de la même manière les faces des tétraèdres, la première relation donne, r et r' étant les rayons des sphères,

$$\frac{-\pi^2 I_{ee'}}{r \cdot r'} = \frac{1}{I_{AA'}} + \frac{1}{I_{BB'}} + \frac{1}{I_{CC'}} + \frac{1}{I_{DD'}};$$

le premier membre de cette égalité est donc constant pour les huit systèmes de centres homologues, et, s'il arrive que, pour deux d'entre eux, $I_{ee'} = 0$, les centres de toutes les autres sphères seront conjugués deux à deux à la surface S .

56. Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à la surface S , l'indice du système des plans E , E' est donné par la relation

$$\begin{aligned} -\pi^2 I_{EE'} &= \frac{(a, E)(a', E')}{I_{aa'}} + \frac{(b, E)(b', E')}{I_{bb'}} \\ &+ \frac{(c, E)(c', E')}{I_{cc'}} + \frac{(d, E)(d', E')}{I_{dd'}}. \end{aligned}$$

ou par la suivante, qui ne contient que des indices :

$$I_{EE'} = \frac{I_{AE'} I_{EA'}}{I_{AA'}} + \frac{I_{BE'} I_{EB'}}{I_{BB'}} + \frac{I_{CE'} I_{EC'}}{I_{CC'}} + \frac{I_{DE'} I_{ED'}}{I_{DD'}}.$$

Deux trièdres ABC , $A'B'C'$ étant correspondants par rapport à la surface S , si par le sommet du premier on mène un plan E , par le sommet du second un plan E' ,

$$I_{EE'} = \frac{\sin \lambda E \sin \lambda' E'}{\sin \lambda A \sin \lambda' A'} I_{AA'} + \frac{\sin \mu E \sin \mu' E'}{\sin \mu B \sin \mu' B'} I_{BB'} + \frac{\sin \nu E \sin \nu' E'}{\sin \nu C \sin \nu' C'} I_{CC'}.$$

Deux dièdres AB , $A'B'$ étant correspondants par rapport à la surface S , si par l'arête du premier on mène un plan E , par l'arête du second un plan E' ,

$$I_{EE'} = \frac{\sin EB \sin E'B' I_{AA'} + \sin EA \sin E'A' I_{BB'}}{\sin AB \sin A'B'}.$$

Remarque. — L'indice $I_{ee'}$ est nul lorsque les points e , e' sont conjugués à la surface S ; si donc le point e' coïncide avec le point e , en égalant à zéro les diverses valeurs de I_e , on obtient, à l'aide de la première valeur de I_e , une équation par points de la surface S ; à l'aide de la seconde, celle à trois termes, on obtient les points d'intersection de cette surface avec la droite suivant laquelle se coupent les plans abc , $a'b'c'$.

Les valeurs de $I_{EE'}$, lorsque le plan E' coïncide avec le plan E , donnent lieu à des remarques analogues; ainsi $I_E = 0$ est une équation par plans de la surface S .

La surface S se trouve rapportée à deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à cette surface.

(A suivre.)