

CAUCHY

**Mémoire sur l'élimination d'une variable
entre deux équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 433-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15_433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE
SUR L'ÉLIMINATION D'UNE VARIABLE ENTRE DEUX ÉQUATIONS
ALGÈBRIQUES ;

PAR CAUCHY.

[SUITE(*).]

Démonstration. — Lorsqu'on suppose

$$(20) \quad \begin{cases} b = al, \dots, & h = ap, & k = AQ, \\ B = AL, \dots, & H = AP, & K = aq, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(21) \quad \begin{cases} l = \frac{b}{a}, \dots, & p = \frac{h}{a}, & q = \frac{k}{a}, \\ L = \frac{B}{A}, \dots, & P = \frac{H}{A}, & Q = \frac{K}{A}, \end{cases}$$

les équations (18) se réduisent aux deux formules

$$(22) \quad \begin{cases} x^n + lx^{n-1} + \dots + px + q = 0, \\ x^n + Lx^{n-1} + \dots + Px + Q = 0; \end{cases}$$

et alors, comme il suffit de multiplier par le produit

$$a^n A^n$$

la valeur de s que donne l'équation (5), pour obtenir celle que donne l'équation (19), cette dernière se réduit, d'après ce qui a été dit ci-dessus, à une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 385.

Ann. de Mathémat., 2^e série, t. XV. (Octobre 1876.)

J'ajoute que cette fonction entière ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés par d'autres fonctions entières des mêmes coefficients. En effet, soient, s'il est possible,

$$s', s''$$

deux semblables facteurs. En vertu des formules (20), jointes à celles qui serviront à exprimer les coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q$$

des équations (22) en fonction des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \quad \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

on pourra considérer les deux facteurs s', s'' comme des fonctions entières de ces racines et des deux coefficients

$$a, A.$$

Cela posé, la formule

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} s' s'' = a^m A^n (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots \\ \quad \times (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{array} \right.$$

devant subsister, quelles que soient les valeurs attribuées aux racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \quad \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

et aux deux coefficients

$$a, A,$$

on prouvera, en raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer le théorème I, qu'un des facteurs s', s'' , le facteur s' par exemple, est algébriquement divisible par le produit

$$\begin{aligned} & (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ & \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{aligned}$$

Donc, parmi les facteurs simples que renferme le second

membre de la formule (23), les seuls qui pourront entrer dans la composition de s'' seront les coefficients

$$a, A,$$

dont l'un au moins devra être facteur de s'' , puisque, dans l'hypothèse admise, s'' ne doit pas se réduire à un facteur numérique. Mais, pour que s'' pût devenir proportionnel à une puissance entière de l'un des coefficients

$$a, A,$$

sans dépendre d'ailleurs, en aucune manière, des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

par conséquent sans dépendre, en aucune manière, des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q,$$

ou, ce qui revient au même, des coefficients

$$b, \dots, h, k, B, \dots, H, K,$$

il faudrait que chacun des coefficients a, A , ou au moins l'un d'eux, entrât comme facteur algébrique dans la fonction entière des quantités

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

à laquelle peut se réduire le second membre de l'équation (23). Or cette condition n'est certainement pas remplie, puisque, dans la fonction entière dont il s'agit, la partie qui dépend uniquement des coefficients

$$a, A, k, K$$

se réduit à l'expression

$$(-1)^n \left[a^{\frac{m}{\omega}} (-K)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}} (-k)^{\frac{m}{\omega}} \right],$$

qui n'est algébriquement divisible ni par Λ , ni par a .
Donc l'hypothèse admise ne peut subsister, et le théorème II est exact.

Corollaire. — Puisque, en vertu des formules (20) ou (21), les équations (18) coïncident avec les équations (22), l'équation finale qui résultera de l'élimination de x entre les équations (18) pourra être réduite à la formule

$$s = 0,$$

la valeur de s étant déterminée par la formule (5). D'autre part, comme la valeur de s déterminée par la formule (5) ne peut s'évanouir, sans que la valeur de s déterminée par la formule (19) s'évanouisse pareillement, l'équation finale dont il s'agit entraînera encore la formule (2), si l'on prend pour s la fonction des coefficients

$$a, b, \dots, h, l, \quad \Lambda, B, \dots, \Pi, K,$$

à laquelle peut se réduire le second membre de la formule (19). J'ajoute qu'alors, si ces coefficients ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre s de la formule (2) ne renfermera aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière de ces mêmes coefficients. C'est là, en effet, une conséquence immédiate du théorème II, en vertu duquel il sera impossible de décomposer s en deux facteurs dont chacun soit une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, l, \quad \Lambda, B, \dots, \Pi, K.$$

Puisque la valeur de s déterminée par la formule (5), c'est-à-dire le produit

$$\begin{aligned} & (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \nu) \dots, \\ & \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \nu)(\gamma - \nu) \dots, \end{aligned}$$

se réduit à une fonction entière des rapports

$$l = \frac{a}{b}, \dots, p = \frac{h}{a}, q = \frac{k}{a}, \quad L = \frac{B}{A}, \dots, P = \frac{H}{A}, Q = \frac{K}{A},$$

la valeur de s que déterminera la formule (19) ne sera pas seulement, comme on l'a déjà remarqué, une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K;$$

elle sera, de plus, une fonction homogène et du degré m relativement aux coefficients

$$a, b, \dots, h, k;$$

elle sera encore une fonction homogène et du degré n relativement aux coefficients

$$A, B, \dots, H, K;$$

donc elle sera, par rapport au système de tous les coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

une fonction entière et homogène du degré $m + n$. Désignons cette même fonction par

$$\varpi(a, b, \dots, h, k; A, B, \dots, H, K);$$

on aura identiquement, eu égard aux formules (20),

$$\begin{aligned} \varpi(a, b, \dots, h, k; A, B, \dots, H, K) \\ = a^m A^m \varpi(1, l, \dots, p, q; 1, L, \dots, P, Q), \end{aligned}$$

et l'équation finale résultant de l'élimination de x entre les équations données pourra être présentée sous la forme

$$(24) \quad \varpi(a, b, \dots, h, k; A, B, \dots, H, K) = 0,$$

si les équations données sont les formules (18), ou même

sous la forme

$$(25) \quad \varpi(1, l, \dots, p, q; 1, L, \dots, P, Q) = 0,$$

si les équations données sont réduites aux formules (22).

Ajoutons que, le second membre de la formule (19) devant être équivalent au produit

$$\alpha^m A^m \varpi(1, l, \dots, p, q; 1, L, \dots, P, Q),$$

les relations subsistant entre les coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q$$

et les racines

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$$

devront entraîner la formule

$$\begin{aligned} \varpi(1, l, \dots, p, q; 1, L, \dots, P, Q) \\ = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\epsilon - \lambda)(\epsilon - \mu)(\epsilon - \nu) \dots \\ \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{aligned}$$

On peut vouloir comparer l'équation finale (24) ou (25) à celle qu'on obtiendrait si, à la méthode d'élimination dont nous avons ici fait usage, on en substituait d'autres, par exemple celles qui se trouvent exposées dans les §§ I et II. On établira sans peine, à ce sujet, les propositions suivantes :

THÉORÈME III. — *Lorsque les coefficients*

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q,$$

renfermés dans les équations

$$(22) \quad \begin{cases} x^n + lx^{n-1} + \dots + px + q = 0, \\ x^m + Lx^{m-1} + \dots + Px + Q = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x , demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres,

alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction

$$\varpi (1, l, \dots, p, q; \quad 1, L, \dots, P, Q),$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (22), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduits à une équation finale de la forme

$$\S = 0,$$

\S désignant une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q.$$

A l'aide des relations qui existent, d'une part, entre les coefficients

$$l, \dots, p, q$$

et les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

d'autre part, entre les coefficients

$$L, \dots, P, Q$$

et les racines

$$\lambda, \mu, \nu, \dots,$$

on pourra transformer \S en une fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). D'ailleurs l'équation

$$\S = 0,$$

résultant de l'élimination de x , devra être vérifiée toutes les fois qu'on établira entre ces racines une rela-

tion qui permettra de satisfaire par une même valeur de x à la première et à la seconde des équations (22), par exemple, lorsqu'une des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

deviendra égale à l'une des racines

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

Donc la fonction entière des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

en laquelle pourra se transformer le premier membre S de l'équation finale

$$S = 0,$$

devra s'évanouir avec chacun des binômes

$$\begin{aligned} \alpha - \lambda, \alpha - \mu, \alpha - \nu, \dots, \beta - \lambda, \beta - \mu, \beta - \nu, \dots, \\ \gamma - \lambda, \gamma - \mu, \gamma - \nu, \dots \end{aligned}$$

et être algébriquement divisible par leur produit. Donc cette fonction sera de la forme

$$(26) \left\{ \begin{aligned} S &= \mathfrak{R}(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ &\times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{aligned} \right.$$

\mathfrak{R} désignant une nouvelle fonction entière des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

qui, comme la fonction S et comme le produit

$$\begin{aligned} (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{aligned}$$

aura, en vertu de la formule (26), la propriété de rester invariable, tandis qu'on échangera entre elles, ou les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

ou les racines

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

En d'autres termes, \mathfrak{R} sera une nouvelle fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). Par conséquent, dans le second membre de la formule (26), le facteur \mathfrak{R} pourra être, aussi bien que le produit de tous les binômes, transformé en une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q.$$

Or, comme, après cette double transformation, la formule (26) donnera

$$(27) \quad s = \mathfrak{R} \varpi (1, l, \dots, p, q, 1, L, \dots, P, Q),$$

il est clair que le premier membre s de l'équation finale se réduira définitivement, si l'on a

$$\mathfrak{R} = 1,$$

à la fonction entière

$$\varpi (1, l, \dots, p, q; 1, L, \dots, P, Q),$$

et, dans le cas contraire, au produit de cette fonction par une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q.$$

Au reste, le dernier cas comprend le premier; et, lorsque le degré de la fonction entière représentée par \mathfrak{R} se réduit à zéro, cette fonction se change en un facteur numérique qui peut être l'unité même.

Corollaire. — La valeur la plus simple que l'on puisse, dans la formule (27), attribuer à la fonction \mathfrak{R} , étant

$$\mathfrak{R} = 1,$$

l'équation (25) offre évidemment la forme la plus simple

à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté par une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q,$$

renfermés dans les équations (22).

THÉORÈME IV. — *Lorsque les coefficients*

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

renfermés dans les équations

$$(18) \quad \begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + \dots + hx + k = 0, \\ Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Hx + K = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x , demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres, alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction

$$\varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K),$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (18), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduits à une équation finale de la forme

$$s = 0,$$

s désignant une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K.$$

On réduira les équations (18) aux équations (22), en posant

$$b = al, \dots, h = ap, k = aq, \quad B = AL, \dots, H = AP, K = AQ;$$

et, à l'aide de ces dernières formules jointes aux relations qui existent d'une part entre les coefficients

$$\text{et les racines} \quad l, \dots, p, q$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

d'autre part entre les coefficients

$$\text{et les racines} \quad L, \dots, P, Q$$

$$\lambda, \mu, \nu, \dots,$$

on pourra transformer S en une fonction entière de toutes les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

et des deux coefficients

$$a, A.$$

Il y a plus : la valeur de S , que l'on obtiendra ainsi, devant être une fonction symétrique des racines de chacune des équations (22), on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la démonstration du théorème III, que cette valeur de S peut être représentée par un produit de la forme

$$\mathfrak{R} \pi (1, l, \dots, p, q; \quad 1, L, \dots, P, Q),$$

\mathfrak{R} désignant une fonction entière, non plus seulement des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

mais aussi des deux coefficients

$$a, A.$$

Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$\varpi(l, \dots, p, q, \dots, L, \dots, P, Q) \\ = \frac{\varpi'(a, b, \dots, h, k, \dots, A, B, \dots, H, K)}{a^m \Lambda^n},$$

la valeur transformée de s ne différera pas de celle que donne la formule

$$(28) \quad s = \frac{\mathfrak{R}}{a^m \Lambda^n} \varpi'(a, b, \dots, h, k; A, B, \dots, H, K).$$

Soit maintenant

$$\Theta = \frac{\mathfrak{R}}{a^m \Lambda^n}$$

ce que deviendra la fraction

$$\frac{\mathfrak{R}}{a^m \Lambda^n}$$

quand on y remplacera les quantités

$$l, \dots, p, q, \dots, L, \dots, P, Q$$

par les rapports équivalents

$$\frac{b}{a}, \dots, \frac{h}{a}, \frac{k}{a}, \frac{B}{A}, \dots, \frac{H}{A}, \frac{K}{A}.$$

Θ ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

divisée ou non divisée par certaines puissances entières et positives des questions a, A ; et, si l'on considère s comme une fonction entière des mêmes coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

la formule (28) donnera identiquement, c'est-à-dire, quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients

dont il s'agit,

$$(29) \quad S = \Theta \varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K).$$

D'autre part, la fonction

$$\varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K),$$

qui, en vertu du théorème II, n'est algébriquement divisible ni par a , ni par A , ne pourra s'évanouir ni avec a , ni avec A . Donc la fonction

$$\Theta = \frac{S}{\varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K)},$$

exprimée à l'aide des seuls coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

ne pourra devenir infinie pour une valeur nulle de a ou de A ; donc cette fonction n'admettra point de diviseurs représentés par des puissances entières et positives des quantités a, A , et ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K.$$

Si le degré de cette fonction entière se réduit à zéro, elle se transformera en un facteur numérique qui pourra être l'unité même, et alors la valeur de S , fournie par l'équation (29), se réduira au premier membre de la formule (24).

Corollaire I. — La valeur la plus simple que l'on puisse, dans la formule (29), attribuer à la fonction Θ , étant

$$\Theta = 1,$$

l'équation (24) offre évidemment la forme la plus simple à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté

par une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

renfermés dans les équations (18).

Corollaire II. — La fonction

$$\varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K)$$

étant, par rapport aux coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

une fonction entière et homogène du degré $m + n$, la valeur de s fournie par l'équation (29), ou le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, sera d'un degré représenté par un nombre ou égal ou supérieur à $m + n$, suivant que Θ sera ou un facteur numérique, ou une fonction entière d'un degré supérieur à zéro. Dans le premier cas, les deux fonctions

$$s \text{ et } \varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K)$$

se trouveront composées de termes correspondants et proportionnels, le rapport entre deux termes correspondants de la première et de la seconde étant précisément la valeur de Θ .

Corollaire III. — Si deux valeurs de s , fournies par deux méthodes diverses d'élimination, et représentées par deux fonctions entières des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

sont l'une et l'autre du degré $m + n$, elles seront toutes deux proportionnelles à la fonction

$$\varpi(a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K),$$

de laquelle on les déduira en multipliant celle-ci par deux facteurs numériques. Donc aussi elles seront pro-

portionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un troisième facteur numérique égal au rapport des deux premières. Par suite, ces deux valeurs de s seront composées de termes correspondants et proportionnels, et deviendront égales, au signe près, si deux termes correspondants de l'une et de l'autre sont égaux ou ne diffèrent que par le signe.

Les démonstrations que nous avons données des théorèmes III et IV reposent sur ce principe : que l'équation finale, produite par l'élimination de x entre deux équations données, se vérifie toujours quand on établit, entre les racines ou les coefficients de celles-ci, des relations qui leur font acquérir des racines communes. Ce principe, admis par Euler, ne saurait être contesté en aucune manière, et s'étend au cas même où les équations données, cessant d'être algébriques, prendraient des formes quelconques. En effet, dire que l'élimination de x entre deux équations algébriques ou transcendantes

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

produit l'équation finale

$$s = 0,$$

dans laquelle s est indépendant de x , c'est dire que les deux premières équations, considérées comme pouvant subsister simultanément, entraînent la troisième : c'est donc, en d'autres termes, dire que la troisième équation subsiste toutes les fois que les deux premières acquièrent des racines communes.

Au reste, les méthodes d'élimination appliquées dans les deux premiers paragraphes de ce Mémoire à des équations algébriques fournissent, comme on devait s'y attendre, des résultats conformes au principe que nous venons de rappeler. En effet, suivant la première des

méthodes exposées dans le § I^{er}, le premier membre s de l'équation finale produite par l'élimination de x entre deux équations algébriques

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

se présentera immédiatement sous la forme

$$uf(x) + vF(x),$$

u, v désignant deux fonctions entières de la variable x et des coefficients que renferment les équations données. Donc ce premier membre, équivalent, quel que soit x , à la somme

$$uf(x) + vF(x),$$

s'évanouira si les valeurs des coefficients permettent d'attribuer à x une valeur qui fasse évanouir simultanément $f(x)$ et $F(x)$. On arrivera encore aux mêmes conclusions, si l'on adopte ou la seconde des méthodes exposées dans le § I^{er}, ou la méthode abrégée de Bezout, attendu que, dans l'une et dans l'autre hypothèse, les diverses équations successivement déduites des équations données, et par suite l'équation finale elle-même, seront toujours de la forme

$$uf(x) + vF(x) = 0,$$

u, v représentant ou deux fonctions entières de x et des coefficients renfermés dans $f(x), F(x)$, ou les quotients qu'on obtient en divisant deux semblables fonctions par une certaine puissance de la variable x .

Lorsque, pour éliminer x entre deux équations algébriques de la forme

$$ax^n + b.x^{n-1} + \dots + hx + k = 0,$$

$$A.x^n + B.x^{n-1} + \dots + Hx + K = 0,$$

on emploie ou la méthode exposée dans ce paragraphe

et fondée sur la considération des fonctions symétriques, ou la première des méthodes rappelées dans le § I^{er}, ou, en supposant $m = n$, la méthode abrégée de Bezout, le premier membre s de l'équation finale, représenté par une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

est toujours, par rapport à ces coefficients (*voir* les pages 393, 399 et 437), du degré $m + n$, par conséquent, lorsque m devient égal à n , du degré $2n$. Donc, en vertu du corollaire III du théorème IV, les trois valeurs de s , fournies par les trois méthodes, seront proportionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un facteur numérique. J'ajoute que ce facteur numérique se réduira constamment à $+1$ ou à -1 . En effet, la valeur de s , que fournira la première des méthodes rappelées dans le § I^{er}, renfermera une seule fois le terme

$$a^m K^n.$$

Or ce même terme se retrouve, avec le même signe, dans le développement de l'expression

$$(-1)^n \left[a^{\frac{m}{\omega}} (-K)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}} (-h)^{\frac{m}{\omega}} \right]^\omega,$$

qui, lorsqu'on a recours à la méthode fondée sur la considération des fonctions symétriques, représente la partie de s dépendant des seuls coefficients

$$a, A, h, K.$$

Enfin, lorsqu'on supposera $m = n$, le même terme

$$a^n K^n = a^n K^n$$

sera encore, au signe près (*voir* la page 399), l'un des termes contenus dans la valeur de s que fournira la méthode abrégée de Bezout. Donc les trois valeurs de s

fournies par les trois méthodes seront, au signe près, égales entre elles ; et l'assertion émise à la page 399 se trouve complètement démontrée.

Remarquons encore que, dans le cas particulier où les degrés m , n des équations données sont des nombres premiers entre eux, et où l'on a par suite

$$\omega = 1,$$

la partie de S , qui dépend des seuls coefficients

$$a, A, k, K$$

dans l'équation finale réduite à sa forme la plus simple, est représentée par le binôme

$$a^m K^n - A^n k^m.$$

D'après ce qui a été dit dans ce paragraphe, pour éliminer x entre deux équations algébriques données, il suffit de joindre l'équation (4) aux formules qui servent à déduire des coefficients d'une équation algébrique les sommes des puissances entières des racines, ou de ces sommes les coefficients eux-mêmes. On peut d'ailleurs, pour atteindre ce but, employer deux sortes de formules qui déterminent les unes successivement, les autres d'un seul coup et d'une manière explicite, chacune des inconnues, c'est-à-dire chacune des sommes ou chacun des coefficients cherchés. Les formules de la première espèce sont celles qui ont été données par Newton, et dont la démonstration la plus élémentaire se trouve dans la *Résolution des équations numériques* de Lagrange (page 133). Quant aux formules de la seconde espèce, on pourrait les déduire des premières par une marche analogue à celle qu'a suivie M. Libri dans un Mémoire publié en 1829, qui en rappelle deux autres présentés par le même auteur à l'Académie des Sciences en 1823

et 1835. Mais alors ces formules, propres à déterminer immédiatement chaque inconnue, ne se présenteraient pas sous la forme la plus simple; et, pour diminuer autant que possible le nombre de leurs termes, il convient de les établir directement à l'aide de considérations analogues à celles dont j'ai fait usage dans l'extrait lithographié d'un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824. C'est au reste ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.