G. Zolotareff

Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 416-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__416_1>

SUR L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES HOMOGÈNES;

Par M. G. ZOLOTAREFF,
Professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Legendre, dans son Mémoire *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes*, a donné deux équations linéaires entre les projections de l'attraction suivant la loi de la nature qu'exerce l'ellipsoïde sur un point intérieur.

Les projections de cette attraction sur les axes de l'ellipsoïde s'expriment, comme on sait, par des intégrales elliptiques de la première et de la seconde espèce.

Soient :

A, B, C ces projections;
a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde;
f, g, h les coordonnées du point attiré;
M la masse de l'ellipsoïde;
ρ sa densité.

Cela posé, les deux relations mentionnées sont

$$\frac{A}{f}+\frac{B}{g}+\frac{C}{h}=4\pi\rho,$$

$$\frac{Aa^2}{f}+\frac{Bb^2}{g}+\frac{Cc^2}{h}=\frac{3M}{n}F(k,\varphi),$$

$$n^2=c^2-a^2,\quad m^2=b^2-a^2,\quad k^2=1-\frac{m^2}{n^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{c},$$

$$a<b<c,$$

$F(k,\varphi)$ désignant une intégrale elliptique de la première espèce.

Dans cette Note, je fais connaître une troisième relation

$$\frac{Aa^2(b^2+c^2)}{f}+\frac{Bb^2(a^2+c^2)}{g}+\frac{Cc^2(a^2+b^2)}{h}=\frac{3Mabc}{\sigma^4}\frac{S}{\pi},$$

$2S$ désignant la surface de l'ellipsoïde dont les axes sont

$$2\alpha=\frac{2\sigma^2}{a},\quad 2\beta=\frac{2\sigma^2}{b},\quad 2\gamma=\frac{2\sigma^2}{c},$$

et σ ayant une valeur arbitraire. On voit, d'après les équations écrites ci-dessus, que l'intégrale de la seconde espèce n'entre dans les projections A, B, C que sous la forme de la surface de l'ellipsoïde.

I. Rappelons d'abord l'expression de la surface de l'ellipsoïde.

Soient α', β', γ' les angles que fait la normale au point (x,y,z) de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

avec les trois axes des coordonnées rectangulaires. On a les formules connues

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos\beta' = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

d'où il vient

$$\frac{x^2}{a^4\cos^2\alpha'} = \frac{y^2}{b^4\cos^2\beta'} = \frac{z^2}{c^4\cos^2\gamma'}$$

$$= \frac{1}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'};$$

par conséquent le carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées s'exprime comme il suit :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^4\cos^2\alpha' + b^4\cos^2\beta' + c^4\cos^2\gamma'}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'}.$$

Désignons encore par λ, μ les expressions

$$\lambda = \frac{b^2\sin^2\alpha'}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha'}}, \quad \mu = \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}}.$$

Une partie connue de la surface de l'ellipsoïde s'exprime, comme on sait, par une intégrale

$$\int_0^{\alpha'} \frac{\pi\, d\alpha'\,(\lambda\mu)}{\cos\alpha'} = \frac{\pi\lambda\mu}{\cos\alpha'} - \pi\int_0^{\alpha'} \frac{\lambda\mu\sin\alpha'\, d\alpha'}{\cos^2\alpha'}.$$

Mais on voit aisément que

$$\int_0^{\alpha'} \frac{b^2c^2\sin^3\alpha'\,d\alpha'}{\cos^2\alpha'\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'}$$

$$-a^2-\int_0^{\alpha'}\frac{[(b^2+c^2-a^2)a^2\cos^2\alpha'+c^2b^2\sin^2\alpha']d\alpha'\sin\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Donc, en désignant par S′ la surface dont il s'agit, on aura

$$S'=\frac{\pi b^2c^2\sin^2\alpha'}{\cos\alpha'\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}$$

$$-\pi\frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'}+\pi a^2$$

$$+\pi\int_0^{\alpha'}\frac{[(b^2+c^2-a^2)a^2\cos^2\alpha'+c^2b^2\sin^2\alpha']\sin\alpha'\,d\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Cela posé, je reprends l'expression

$$r^2=\frac{a^4\cos^2\alpha'+b^4\cos^2\beta'+c^4\cos^2\gamma'}{a^2\cos^2\alpha'+b^2\cos^2\beta'+c^2\cos^2\gamma'}.$$

En faisant

$$\cos\beta'=\cos\theta\sin\alpha',$$
$$\cos\gamma'=\sin\theta\sin\alpha',$$

je considère une intégrale double

$$\int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2\sin\alpha'\,d\alpha'\,d\theta.$$

En ayant égard à ce que

$$r^2=b^2+c^2+\frac{a^2(a^2-b^2-c^2)\cos^2\alpha'-b^2c^2\sin^2\alpha'}{a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha'\cos^2\theta+c^2\sin^2\alpha'\sin^2\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(b^2+c^2)(1-\cos\alpha')$$
$$+\,2\pi\int_0^{\alpha'}\frac{[a^2(a^2-b^2-c^2)\cos^2\alpha' - b^2c^2\sin^2\alpha']\sin\alpha'\, d\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Donc

$$2S' + \int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(a^2+b^2+c^2)$$
$$+\,\frac{2\pi}{\cos\alpha'}\,\frac{b^2c^2\sin^2\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')}}$$
$$-\,2\pi\,\frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'}$$
$$-\,2\pi(b^2+c^2)\cos\alpha'.$$

En faisant $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$2S + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(a^2+b^2+c^2),$$

S désignant la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

Soient s et t les demi-axes de la section de l'ellipsoïde par un plan passant par son centre et conjugué à la direction de r. On a

$$r^2 + s^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Il en résulte

$$(1)\qquad 2S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (s^2+t^2)\sin^2\alpha'\, d\alpha'\, d\theta.$$

II. Les composantes de l'attraction suivant les axes de l'ellipsoïde sont

$$A = 8\rho f b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta}{\Omega},$$

$$B = 8\rho g a^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \cos^2\theta\, d\varphi\, d\theta}{\Omega},$$

$$C = 8\rho h a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \sin^2\theta\, d\varphi\, d\theta}{\Omega},$$

Ω désignant une quantité

$$b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + b^2a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta.$$

Il suit de ces formules que

$$\left[\frac{A}{f}a^2(b^2+c^2) + \frac{B}{g}b^2(a^2+c^2) + \frac{C}{h}c^2(a^2+b^2)\right]\frac{\sigma^4\pi}{6Mabc}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta \\ + \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta\end{array}\right]}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta,$$

α, β, γ désignant ici les quantités

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{a}, \quad \beta = \frac{\sigma^2}{b}, \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{c}.$$

D'ailleurs, on sait que l'expression

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta + \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

représente la somme des carrés des demi-axes de la section de l'ellipsoïde

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

par le plan, mené par le centre perpendiculairement au rayon vecteur, déterminé par les deux angles φ et θ.

En désignant maintenant par S la surface de l'ellipsoïde (2), on aura, en vertu de la formule (1),

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta \\ + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta\end{array}\right]}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

Donc

$$\frac{A}{f} a^2(b^2 + c^2) + \frac{B}{g} b^2(a^2 + c^2) + \frac{C}{h} c^2(a^2 + b^2) = \frac{3Mabc}{\sigma^4} \frac{S}{\pi}.$$

C. Q. F. D.