

ÉDOUARD LUCAS

**Solution d'un problème de Beha-Eddin
sur l'analyse indéterminée**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 359-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__359_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UN PROBLÈME DE BEHÀ-EDDIN SUR L'ANALYSE
INDÉTERMINÉE ;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

L'auteur arabe Behà-Eddin, qui vécut de 1547 à 1622, a proposé à la fin de son *Traité de calcul*, intitulé *Khé-lasat al Hisàb*, la résolution du système des deux équations simultanées

$$\begin{aligned}x^2 + x + 2 &= u^2, \\x^2 - x - 2 &= v^2,\end{aligned}$$

en nombres rationnels. Nous remplacerons les inconnues rationnelles du système précédent par des inconnues entières, et nous considérerons par conséquent le système

$$1) \quad \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \\ x^2 - xy - 2y^2 = v^2. \end{cases}$$

Le traducteur français de l'ouvrage en question (*) avait trouvé seulement la solution $x = 17, y = -16$, et en avait conclu, comme le présumait l'auteur arabe, que ce problème est impossible à résoudre en nombres entiers et positifs. M. Genochi (**), dans un remarquable commentaire des ouvrages de Léonard de Pise, a donné la solution $x = 34, y = 15$ à l'aide d'un artifice particulier employé souvent par Diophante et par Fermat, mais il n'a point donné la solution complète du système (1). La méthode que nous proposons ici nous paraît conduire à la résolution complète du problème de Behà-Eddin.

On déduit du système (1), dans lequel on peut supposer que les indéterminées x, y, u, v représentent des nombres entiers premiers entre eux, l'équation

$$u^2 + v^2 = 2x^2,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2.$$

On doit donc poser, d'après la formule connue de résolution des triangles rectangles dont les côtés sont entiers,

$$\frac{1}{2}(u-v) = 2rs,$$

$$\frac{1}{2}(u+v) = r^2 - s^2;$$

et par suite,

$$u = r^2 - s^2 + 2rs,$$

$$v = r^2 - s^2 - 2rs,$$

$$x = r^2 + s^2;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, t. V, p. 323; année 1846.

(**) *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Bal-tasare Boncompagni, Note analitiche di Angelo Genocchi*. Roma, 1855. p. 85 et 91.

en portant ces valeurs dans l'équation obtenue et retranchant membre à membre les deux équations du système proposé, on obtient

$$2y^2 + xy = 4rs(r^2 - s^2);$$

et, en résolvant cette équation par rapport à y , on a

$$y = \frac{-x \pm t}{4},$$

t étant l'une des inconnues de l'équation biquadratique

$$(2) \quad (r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2.$$

Ainsi donc le système de Behâ-Eddin est ramené à l'équation (2), qui représente la mise en équation du problème suivant :

PROBLÈME. — *Trouver en nombres entiers un triangle rectangle tel, que l'aire du carré de l'hypoténuse augmentée de trente-deux fois l'aire du triangle soit égale à un carré parfait.*

L'équation (2), peut être remplacée par la suivante :

$$(r^2 + 16rs - s^2)^2 - t^2 = 252r^2s^2;$$

mais, si l'on remarque que le premier membre est le produit de deux facteurs dont le plus grand commun diviseur est égal à 2, on en déduit, en supposant que l'inconnue t peut être positive ou négative,

$$\begin{aligned} r^2 + 16rs - s^2 + t &= \pm 14(3p)^2, \\ r^2 + 16rs - s^2 - t &= \pm 2q^2, \\ rs &= pq. \end{aligned}$$

L'addition des deux premières équations nous conduit au nouveau système

$$\begin{aligned} r^2 + 16rs - s^2 &= \pm (63p^2 + q^2), \\ rs &= pq. \end{aligned}$$

Posons maintenant $r = mp$, et $q = ms$, nous obtenons l'une ou l'autre des deux équations

$$(3) \quad m^2 p^2 + 16 mps - s^2 = \pm (63p^2 + m^2 s^2).$$

PREMIER CAS. — Si nous exprimons que la valeur de m , tirée de l'équation précédente dont le second membre est pris avec le signe +, est rationnelle, nous obtenons

$$m = \frac{8ps \pm t}{s^2 - p^2}$$

avec la condition

$$(9p^2 - s^2)(7p^2 + s^2) = U^2.$$

Cette équation est immédiatement satisfaite par les valeurs

$$p = 1, \quad s = 1, \quad U = 8,$$

desquelles on tire, mais dans ce cas seulement par exception, puisque le dénominateur de m s'annule, à l'aide de l'équation en m qui devient linéaire,

$$m = 4,$$

et par suite les deux solutions du système (1) indiquées plus haut. On déduit de la dernière équation

$$(4) \quad \begin{cases} 9p^2 - s^2 = 8g^2, \\ 7p^2 + s^2 = 8h^2, \\ U = 8gh; \end{cases}$$

et, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} 2p^2 &= g^2 + h^2, \\ p^2 - s^2 &= 4(g^2 - h^2). \end{aligned}$$

La première des deux équations précédentes est résolue par les formules

$$\begin{aligned} p &= a^2 + b^2, \\ g &= a^2 - b^2 - 2ab, \\ h &= a^2 - b^2 + 2ab, \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs dans la seconde, on trouve

$$(a^2 + b^2)^2 + 32ab(a^2 - b^2) = s^2;$$

c'est précisément l'équation (2) avec des indéterminées beaucoup plus petites. Ainsi donc, d'une solution quelconque (r, s, t) de l'équation

$$(2) \quad (r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2,$$

on déduit deux solutions nouvelles R, S, T à l'aide des formules

$$(A) \quad \begin{cases} m = t(r^2 + s^2) \pm (r^4 + s^4 - 6r^2s^2), \\ n = 4rs(r^2 - s^2), \\ R = m(r^2 + s^2), \\ S = nt, \\ T = 63n^2(r^2 + s^2)^2 - m^2t^2; \end{cases}$$

et l'on a ensuite pour le système proposé :

$$(B) \quad \begin{cases} x = r^2 + s^2, \\ 4y = -(r^2 + s^2) \pm t, \\ u = r^2 - s^2 - 2rs, \\ v = r^2 - s^2 + 2rs. \end{cases}$$

SECOND CAS. — Il reste à considérer le système déduit de l'équation (3) en prenant le signe inférieur. Pour que la valeur de m soit rationnelle, on doit avoir

$$m = \frac{-8ps \pm U}{s^2 + p^2},$$

avec l'équation de condition

$$(s^2 - 7p^2)(s^2 + 9p^2) = U^2,$$

de laquelle on déduit évidemment le système

$$\begin{aligned} s^2 - 7p^2 &= g^2, \\ s^2 + 9p^2 &= h^2, \\ U &= gh. \end{aligned}$$

On obtient aisément

$$16p^2 = h^2 - g^2,$$

et par suite

$$h + g = 2u^2,$$

$$h - g = 8v^2,$$

$$p = uv.$$

En portant ces valeurs dans l'une des équations du système précédent, nous avons

$$u^4 - u^2v^2 + 16v^4 = s^2,$$

ou encore

$$(u^2 + 4v^2)^2 - 9u^2v^2 = s^2.$$

La décomposition en facteurs donne

$$u^2 + 4v^2 = s = 9z^2,$$

$$u^2 + 4v^2 = s = w^2,$$

$$uv = wz,$$

et par suite le système

$$2u^2 + 8v^2 = 9z^2 + w^2,$$

$$uv = wz.$$

Posons, comme précédemment, $u = mw$, $z = mv$; il en résulte

$$m^2 = \frac{8v^2 - w^2}{9v^2 - 2w^2}.$$

Puisque la valeur de m doit être rationnelle, on doit avoir

$$9v^2 - 2w^2 = \alpha c^2,$$

$$8v^2 - w^2 = \alpha d^2,$$

α représentant le plus grand commun diviseur entre les deux premiers membres des équations précédentes. Mais si l'on suppose $\alpha = \pm 1$ ou $\alpha = -7$, les équations sont impossibles suivant les modules 2 et 3; on doit donc poser $\alpha = 7$, et conséquemment

$$9v^2 - 2w^2 = 7c^2,$$

$$8v^2 - w^2 = 7d^2,$$

ou encore

$$\begin{aligned} 9d^2 - w^2 &= 8c^2, \\ 7d^2 + w^2 &= 8v^2. \end{aligned}$$

Ce système est identique avec le système (4), mais contient des indéterminées plus petites. Et ainsi le problème de Behâ-Eddin se trouve complètement résolu, sauf erreur, pour la première fois (*).