Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__326_0>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — « Je ne puis résister au plaisir de vous communiquer une jolie solution de la question 1192, qui m'a été donnée par M. *de Virac,* l'un de mes élèves.

» Supposons l'hyperbole équilatère; C le centre de l'hyperbole, O un point; A le point d'intersection de OC avec l'ellipse, et M le point d'intersection de OC avec la corde des contacts. Nous savons que la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est égale à $\overline{CO}^2$. D'un autre côté, $\overline{OA}^2 = OM.OC$; donc le carré de son conjugué égale $\overline{CO}^2 - CO.OM = CO.MC$. Donc l'aire de l'ellipse est proportionnelle à $\sqrt{CM.MO}$, et le maximum a lieu pour $CM = MO = \frac{1}{2}CO$. On étend, sans difficulté, cette conclusion aux hyperboles quelconques au moyen des projections.

» La corde des contacts passe par le milieu de CO, et est parallèle à la tangente en O à l'hyperbole; donc elle enveloppe une hyperbole homothétique et concentrique à la proposée. Le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. »

Extrait d'une lettre de M. Poujade, professeur au lycée d'Amiens. — Je vois dans le numéro de janvier des *Nouvelles Annales* un rapprochement fait par M. Lucas entre le lieu de la question 1173 et le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle semi-régulier inscrit à l'ellipse. Voulez-vous me permettre d'indiquer aussi la propriété suivante :

Il est visible que le lieu du point de rencontre des hauteurs dans un triangle semi-régulier circonscrit à l'ellipse est une ellipse concentrique passant par les points de rebroussement de la développée.

Ce lieu est tel que, si l'on prend la polaire d'un de ses points par rapport à l'ellipse, les normales à l'ellipse aux deux points où elle coupe cette polaire vont se couper sur l'ellipse.

Autrement dit, c'est le lieu indiqué par M. Faure (*Nouvelles Annales*, 1872, p. 47).

Puisque j'ai pris la plume, permettez-moi encore de vous signaler deux ou trois propriétés des normales qui n'ont peut-être pas encore été remarquées.

1° Pour que les normales en quatre points A, B, A', B', pris sur l'ellipse, concourent en un même point, il faut et il suffit que, si l'on construit le pôle de AB, A'B' soit symétrique, par rapport au centre, de la droite qui joint les projections de ce pôle sur les deux axes.

Cette propriété, qui conduit au théorème connu de Joachimsthal, revient aux relations

$$x'x'' = -a^2, \quad y'y'' = -b^2$$

entre les coordonnées des pôles de AB et de A'B', par rapport aux deux axes de l'ellipse.

Parmi les conséquences de cette proposition, en voici une assez simple :

Si d'un point de l'hyperbole $xy = ab$ (par rapport aux mêmes axes) on mène à l'ellipse les deux tangentes, puis les normales aux points de contact ; ensuite, du point de concours de ces deux normales, les deux autres normales qu'on peut mener à la courbe, les tangentes aux pieds de ces deux normales iront se couper sur la même hyperbole.

2° D'un point de la développée on mène les trois normales à l'ellipse, lieu du point de rencontre des tangentes aux pieds des deux normales qui ne sont pas tangentes à la développée au point considéré, lieu du point de rencontre des tangentes au pied de la normale tangente à la développée au point considéré, et au pied de l'une des deux autres.

On trouve, pour le premier lieu,

$$x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2,$$

et, pour le second,

$$(x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) + 9a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

3° Voici enfin une formule, qui m'a semblé curieuse, pour les coefficients angulaires des tangentes menées d'un point x', y' extérieur à une ellipse, $-\dfrac{b^2x' \pm y'\sqrt{P}}{a^2y' \mp x'\sqrt{P}}$, en posant $P = a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2$. On obtient aussi leurs longueurs, mais sous une forme moins brève.

Note. — M. Moret-Blanc nous a adressé des solutions des questions proposées en Mathématiques spéciales et élémentaires au concours général de 1875; M. Vladimir Habbé, maître de Mathématiques à l'École Alexandre, à Nicolajeff, a résolu les questions 1197, 1198; MM. Souverain et Thevenin les questions 1197, 1198, 1202; ces solutions nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de juin.