

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 292-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__292_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'artillerie.

[SUITE (*).]

10. THÉORÈME.—*On donne, dans un plan P, m droites $\alpha\beta\dots\mu$ et, dans un second plan P', m droites $\alpha'\beta'\dots\mu'$. Si l'on forme le déterminant δ_m avec ces deux systèmes de m droites :*

1° *Lorsque m est plus grand que 3, $\delta_m = 0$.*

2° *Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par R, R' les rayons des cercles circonscrits aux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ et par S, S' les aires de ces triangles,*

$$\delta_3 = \frac{SS'}{RR'} I_{PP'}^2.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série t. XV, p. 251.

3° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par d, d' les points d'intersection des droites $\alpha\beta, \alpha'\beta'$,

$$\delta_2 = \sin \alpha \beta \sin \alpha' \beta' I_{dd'} I_{PP'}.$$

Démonstration. — Par les droites du plan P menons des plans A, B, ..., M; par les droites du plan P' menons des plans A', B', ..., M'. A l'aide de ces deux couples de m plans et des plans P, P', formons le déterminant ∇_{m+1} :

$$\nabla_{m+1} = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \dots & I_{AP'} \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \dots & I_{BP'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{PA'} & I_{PB'} & \dots & I_{PP'} \end{vmatrix}.$$

Multiplions par $I_{PP'}$ tous les termes des m premières lignes de ce déterminant, retranchons ensuite des 1, 2, ..., $m^{\text{ièmes}}$ lignes du nouveau déterminant les produits des éléments correspondants de la dernière par $I_{AP'}, I_{BP'}, \dots, I_{MP'}$. Les termes de la première ligne sont

$$\begin{aligned} I_{AA'} I_{PP'} - I_{PA'} I_{AP'} &= - \frac{I}{\pi^2} \sin PA \sin P'A' I_{\alpha\alpha'}, \\ I_{AB'} I_{PP'} - I_{PB'} I_{AP'} &= - \frac{I}{\pi^2} \sin PA \sin P'B' I_{\alpha\beta'}, \\ &\dots \dots \dots \\ I_{AM'} I_{PP'} - I_{PM'} I_{AP'} &= - \frac{I}{\pi^2} \sin PA \sin P'M' I_{\alpha\mu'}, \\ I_{AP'} I_{PP'} - I_{PP'} I_{AP'} &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a des résultats analogues pour les autres lignes.

Tous les termes de la dernière colonne étant nuls, sauf le terme $I_{PP'}$, nous avons

$$(-\pi^2)^m \nabla_{m+1} I_{PP'}^m = I_{PP'} \delta_m U U',$$

en posant

$$U = \sin PA \sin PB \dots \sin PM, \quad U' = \sin P'A' \sin P'B' \dots \sin P'M',$$

d'où nous déduisons

$$\delta_m = -\pi^2 \int^m \frac{\nabla_{m+1} \mathbf{I}_{PP'}^{m-1}}{\mathbf{U}\mathbf{U}'}$$

1° Pour $m > 3$,

$$\nabla_{m+1} = 0;$$

2° Pour $m = 3$,

$$\delta_3 = -\pi^6 \frac{\nabla_4 \mathbf{I}_{PP'}^2}{\mathbf{U}\mathbf{U}'},$$

$$\mathbf{U} = \sin \text{PA} \sin \text{PB} \sin \text{PC}, \quad \mathbf{U}' = \sin \text{P}'\text{A}' \sin \text{P}'\text{B}' \sin \text{P}'\text{C}'.$$

Or

$$\nabla_4 = -\frac{1}{\pi^6} \frac{(3\mathbf{V})^3}{2 \text{ABCP}} \frac{(3\mathbf{V}')^3}{2 \text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{P}'},$$

en désignant par \mathbf{V} , \mathbf{V}' les volumes de tétraèdres dont les faces sont formées par les plans ABCP , $\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{P}'$, et par ces mêmes lettres les aires de ces faces. On voit aisément que

$$\frac{(3\mathbf{V})^3}{2 \text{ABCP}} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{R}} \sin \text{PA} \sin \text{PB} \sin \text{PC},$$

$$\frac{(3\mathbf{V}')^3}{2 \text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{P}'} = \frac{\mathbf{S}'}{\mathbf{R}'} \sin \text{P}'\text{A}' \sin \text{P}'\text{B}' \sin \text{P}'\text{C}',$$

\mathbf{R} et \mathbf{R}' étant les rayons des cercles circonscrits aux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et \mathbf{S} , \mathbf{S}' les aires de ces triangles. On obtient donc la relation 2°.

3° Lorsque $m = 2$,

$$\delta_2 = \pi^4 \frac{\nabla_3 \mathbf{I}_{PP'}}{\mathbf{U}\mathbf{U}'}, \quad \mathbf{U} = \sin \text{PA} \sin \text{PB}, \quad \mathbf{U}' = \sin \text{P}'\text{A}' \sin \text{P}'\text{B}'.$$

Or

$$\nabla_3 = \frac{1}{\pi^4} \sin \text{PAB} \sin \text{P}'\text{A}'\text{B}' \mathbf{I}_{dd'},$$

d , d' étant les points d'intersection des plans PAB ,

$P'A'B'$, ou des droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; d'autre part,

$$\begin{aligned}\sin PAB &= \sin PA \sin PB \sin \alpha\beta, \\ \sin P'A'B' &= \sin P'A' \sin P'B' \sin \alpha'\beta',\end{aligned}$$

d'où résulte la relation 3°.

Remarque. — Si m et n sont les pôles des plans M , N , on a

$$I_{mn} = -\pi^2 \frac{I_{VN}}{(o, M)(o, N)};$$

d'où il suit que si l'on a entre les indices des points a , b , c, \dots, m , n une relation de la forme

$$I_{ab} I_{bc} \dots I_{mn} = I_{am} I_{nc} \dots I_{bb},$$

c'est-à-dire telle que ces points entrent le même nombre de fois dans les deux produits, on aura, entre les plans polaires A , B , C, \dots, M , N de ces points, la relation

$$I_{AB} I_{BC} \dots I_{MN} = I_{AM} I_{NC} \dots I_{BB}.$$

Cette remarque donnera une solution intuitive de plusieurs de nos relations.

11. Si dans la relation $\Delta_2 = ab \cdot a'b'I_{\gamma\gamma'}$ on suppose que les points b , b' coïncident avec le centre o de la surface S , puisque $I_{ab'} = I_{ba'} = I_{bb'} = -1$, on trouve

$$I_{aa'} = -1 - oa \cdot oa' I_{\gamma\gamma'}.$$

Lorsque l'un des points a ou a' est à l'infini sur γ ou γ' ,

$$I_{\gamma\gamma'} = -\frac{I_{aa'}}{oa \cdot oa'}.$$

12. Si dans la relation $\delta_2 = \sin \alpha\beta \sin \alpha'\beta' I_{pp'} I_{DD'}$ on suppose que les droites β , β' passent par le centre o ,

$$(o, \alpha) = op \sin \alpha\beta, \quad (o, \alpha') = op' \sin \alpha'\beta'.$$

d'où

$$I_{\alpha\alpha'} - \frac{I_{\alpha\beta'} I_{\beta\alpha'}}{I_{\beta\beta'}} = (o, \alpha)(o, \alpha') \frac{I_{pp'}}{op \cdot op'} \frac{I_{DD'}}{I_{\beta\beta'}}.$$

Lorsque les points p, p' s'éloignent à l'infini sur les droites α, α' , les droites β, β' deviennent les diamètres α_0, α'_0 respectivement parallèles aux droites α, α' , et l'on a

$$I_{\alpha\beta'} = I_{\beta\alpha'} = I_{\beta\beta'} = I_{\alpha_0\alpha'_0}, \quad \frac{I_{pp'}}{op \cdot op'} = - I_{\alpha_0\alpha'_0},$$

d'où résulte :

Deux droites α, α' étant données, si α_0, α'_0 sont les diamètres de la surface S parallèles à ces droites, D et D' les plans diamétraux menés par α et α' ,

$$I_{\alpha\alpha'} = I_{\alpha_0\alpha'_0} - (o, \alpha)(o, \alpha') I_{DD'}.$$

Il suit de là que, si les droites α, α' s'éloignent à l'infini dans les plans D, D',

$$I_{DD'} = - \frac{I_{\alpha\alpha'}}{(o, \alpha)(o, \alpha')}.$$

13. Si, dans la relation $\nabla_2 = - \frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\nu\nu'}$, on suppose que les plans B, B' passent par le centre o de la surface S,

$$(o, A) = (o, \nu) \sin AB, \quad (o, A') = (o, \nu') \sin A'B',$$

de sorte que

$$I_{AA'} - \frac{I_{AB'} I_{BA'}}{I_{BB'}} = - \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2 I_{BB'}} \frac{I_{\nu\nu'}}{(o, \nu)(o, \nu')}.$$

Lorsque les droites ν, ν' s'éloignent à l'infini dans les plans A, A', les plans B, B' deviennent les plans diamétraux A_0, A'_0 parallèles aux plans A, A', et l'on a

$$I_{AB'} = I_{BA'} = I_{BB'_0} = I_{A_0A'_0}, \quad \frac{I_{\nu\nu'}}{(o, \nu)(o, \nu')} = - I_{A_0A'_0}.$$

Par conséquent :

Deux plans A, A' étant donnés, si l'on désigne par Λ_0, Λ'_0 les plans diamétraux parallèles à ces plans,

$$I_{AA'} = I_{\Lambda_0 \Lambda'_0} + \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2}.$$

Si, dans cette relation, l'un des plans A, A' s'éloigne à l'infini,

$$\frac{I_{AA'}}{(o, A)(o, A')} = \frac{1}{\pi^2}.$$

14. Si l'on développe le déterminant Δ_s formé à l'aide des points $abcde, a'b'c'd'e'$, par rapport aux éléments de sa dernière colonne, on trouve, après avoir ôté le facteur $a'b'c'd'$,

$$abcdI_{ee'} = bcdeI_{ae'} + cdaeI_{be'} + dabeI_{ce'} + abceI_{de'},$$

avec la condition

$$abcd = bcde + cdae + dabe + abce,$$

à laquelle se réduit la relation précédente lorsque le point e' coïncide avec le centre de la surface S . Si l'on remplace les volumes par leurs valeurs, en désignant par A, B, C, D les faces du tétraèdre $abcd$, on aura ce théorème :

Étant donné un tétraèdre $abcd$ et la surface S , l'indice du système des points e, e' est donné par la relation

$$(1) \quad I_{ee'} = \frac{(e, A)}{(a, A)} I_{ae'} + \frac{(e, B)}{(b, B)} I_{be'} + \frac{(e, C)}{(c, C)} I_{ce'} + \frac{(e, D)}{(d, D)} I_{de'}.$$

Le déterminant ∇_s conduit, de même, au suivant :

Étant donné un tétraèdre $abcd$ et la surface S , l'indice du système des plans E, E' est donné par la

relation

$$(2) \mathbf{I}_{EE'} = \frac{(a, E)}{(a, A)} \mathbf{I}_{AE'} + \frac{(b, E)}{(b, B)} \mathbf{I}_{BE'} + \frac{(c, E)}{(c, C)} \mathbf{I}_{CE'} + \frac{(d, E)}{(d, D)} \mathbf{I}_{DE'}$$

15. A l'aide d'un second tétraèdre $a'b'c'd'$, on trouverait de même

$$\mathbf{I}_{ee'} = \frac{(e', A')}{(a', A')} \mathbf{I}_{ea'} + \frac{(e', B')}{(b', B')} \mathbf{I}_{eb'} + \frac{(e', C')}{(c', C')} \mathbf{I}_{ec'} + \frac{(e', D')}{(d', D')} \mathbf{I}_{ed'}$$

Remplaçons dans cette relation le point e successivement par a, b, c, d , et substituons dans la relation (1) les valeurs que nous obtenons pour $\mathbf{I}_{aa'}, \mathbf{I}_{bb'}, \mathbf{I}_{cc'}, \mathbf{I}_{dd'}$, nous avons ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ et la surface S , l'indice du système des points e, e' par rapport à cette surface est exprimé par la relation

$$\mathbf{I}_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \mathbf{I}_{aa'} \quad (16 \text{ termes});$$

et, comme cas particuliers :

Étant donnés deux triangles $abc, a'b'c'$ ou $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma'$ et la surface S , si l'on prend un point e dans le plan abc , un point e' dans le plan $a'b'c'$,

$$\mathbf{I}_{ee'} = \sum \frac{(e, \alpha)(e', \alpha')}{(a, \alpha)(a', \alpha')} \mathbf{I}_{aa'} \quad (9 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux segments $ab, a'b'$ et la surface S , si l'on prend sur le premier un point e , sur le second un point e' ,

$$\mathbf{I}_{ee'} = \sum \frac{eb \cdot e'b'}{ab \cdot a'b'} \mathbf{I}_{aa'} \quad (4 \text{ termes}).$$

16. Si dans cette relation les points e, e' sont à l'infini et que $\varepsilon, \varepsilon'$ désignent les diamètres de S , parallèles aux droites $ab, a'b'$, on obtient, après avoir divisé par oe ,

oe' les deux membres de l'égalité, et en ayant égard à la relation n° 11,

$$- ab \cdot a' b' I_{\varepsilon'} = I_{aa'} + I_{bb'} - I_{ab'} - I_{ba'}.$$

D'où résulte, lorsque les points a' , b' coïncident avec a et b :

Deux points a et b étant pris dans l'espace, si l'on désigne par ε le diamètre de la surface S parallèle à ab ,

$$2I_{ab} = I_a + I_b + ab^2 I_\varepsilon.$$

Si ε_0 est le demi-diamètre parallèle à ab , on sait d'ailleurs que $I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}$.

17. Nous avons la relation

$$\begin{vmatrix} I_{ee'} & I_{ef'} \\ I_{fe'} & I_{ff'} \end{vmatrix} = ef \cdot e' f' I_{\varepsilon'},$$

e, f étant deux points de la droite ε ; e', f' deux points de la droite ε' . Remplaçons $I_{ee'}$ par la valeur (1), $I_{ef'}$, $I_{fe'}$, $I_{ff'}$ par les valeurs analogues,

$$I_{ef'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} I_{af'}, \quad I_{fe'} = \sum \frac{(f, A)}{(a, A)} I_{ae'},$$

$$I_{ff'} = \sum \frac{(f, A)}{(a, A)} I_{af'}.$$

On obtient d'abord

$$ef \cdot e' f' I_{\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (e, A) & (e, B) \\ (f, A) & (f, B) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{ae'} & I_{af'} \\ I_{be'} & I_{bf'} \end{vmatrix} \frac{1}{(a, A)(b, B)};$$

or, on voit aisément que

$$\begin{vmatrix} (e, A) & (e, B) \\ (f, A) & (f, B) \end{vmatrix} = ef \mid \varepsilon, \nu \mid \sin AB,$$

$\mid \varepsilon, \nu \mid$ désignant le produit de la plus courte distance de

la droite ε à l'intersection ν des plans A, B, multipliée par $\sin \varepsilon \nu$; d'ailleurs le second déterminant a pour valeur $ab \cdot \varepsilon' f' I_{\gamma' \nu'}$, donc

$$I_{\varepsilon' \nu'} = \sum \frac{|\varepsilon, \nu| ab \sin AB}{(a, A)(b, B)} I_{\gamma' \nu'}$$

Mais on a aussi

$$(a, A)(b, B) = \begin{vmatrix} (a, A) & (a, B) \\ (b, A) & (b, B) \end{vmatrix} = ab |\gamma, \nu| \sin AB,$$

et, par conséquent, étant donné le tétraèdre $abcd$, l'indice du système des droites $\varepsilon \varepsilon'$ est donné par la relation

$$(3) \quad I_{\varepsilon \varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|}{|\gamma, \nu|} I_{\gamma' \nu'} \quad (6 \text{ termes}).$$

A l'aide du tétraèdre $a'b'c'd'$, on aurait

$$I_{\varepsilon \varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon', \nu'|}{|\gamma', \nu'|} I_{\gamma' \nu'}$$

Si dans cette expression on remplace ε successivement par toutes les arêtes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ du tétraèdre $abcd$ et que l'on remplace dans la relation (3) $I_{\alpha \varepsilon'}, I_{\beta \varepsilon'}, I_{\gamma \varepsilon'}, \dots$ par les valeurs ainsi obtenues, on voit que :

18. Étant donnés deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$ et la surface S, l'indice du système des droites $\varepsilon, \varepsilon'$ est donné par la relation

$$I_{\varepsilon \varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon, \nu| |\varepsilon', \nu'|}{|\gamma, \nu| |\gamma', \nu'|} I_{\gamma' \nu'} \quad (36 \text{ termes}).$$

De ces deux relations nous déduisons ces cas particuliers :

Si, par le sommet du trièdre $\lambda \mu \nu$ ou ABC, on mène une droite ε , on a, ε' étant une droite arbitraire,

$$I_{\varepsilon \varepsilon'} = \sum \frac{\sin(\varepsilon, A)}{\sin(\lambda, A)} I_{\lambda \varepsilon'} = \sum \frac{\sin \varepsilon \mu \nu}{\sin \lambda \mu \nu} I_{\lambda \varepsilon'} \quad (3 \text{ termes}).$$

Deux trièdres $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ étant donnés, si, par leurs sommets, on mène les droites ε , ε' ,

$$\left. \begin{aligned} I_{\varepsilon\varepsilon'} &= \sum \frac{\sin \varepsilon A \sin \varepsilon' A'}{\sin \lambda A \sin \lambda' A'} I_{\lambda\lambda'} \\ &= \sum \frac{\sin \varepsilon \mu \nu \sin \varepsilon' \mu' \nu'}{\sin \lambda \mu \nu \sin \lambda' \mu' \nu'} I_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \right\} \quad (9 \text{ termes}).$$

Si, par le sommet de l'angle $\lambda\mu$ et dans son plan, on mène une droite ε , on a, ε' étant une droite arbitraire,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{\sin \varepsilon \mu}{\sin \lambda \mu} I_{\lambda\varepsilon'} \quad (2 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux angles $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, si l'on mène par leurs sommets et dans leurs plans les droites ε , ε' ,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{\sin \varepsilon \mu \sin \varepsilon' \mu'}{\sin \lambda \mu \sin \lambda' \mu'} I_{\lambda\lambda'} \quad (4 \text{ termes}).$$

Si, dans le plan du triangle abc , on mène une droite ε , on a, ε' étant une droite quelconque,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{(a, \varepsilon)}{(a, \alpha)} I_{\alpha\varepsilon'} \quad (3 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux triangles abc , $a'b'c'$, si, dans les plans de ces triangles, on mène les droites ε , ε' ,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{(a, \varepsilon)}{(a, \alpha)} \frac{(a', \varepsilon')}{(a', \alpha')} I_{\alpha\alpha'} \quad (9 \text{ termes}).$$

19. A l'aide de la relation (2), on établira de la même manière ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ et la surface S , l'indice du système des plans E , E' est donné par la relation

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} \frac{(a', E')}{(a', A')} I_{AA'} \quad (16 \text{ termes});$$

et, comme cas particuliers :

Étant donnés deux angles trièdres ABC , $A'B'C'$ ou $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ et la surface S , si l'on mène par le sommet du premier un plan E , par le sommet du second un plan E' ,

$$\begin{aligned} I_{EE'} &= \sum \left. \begin{aligned} &\frac{\sin(\lambda, E) \sin(\lambda', E')}{\sin(\lambda, A) \sin(\lambda', A')} I_{AA'} \\ &= \sum \frac{\sin EBC \sin E'B'C'}{\sin ABC \sin A'B'C'} I_{AA'} \end{aligned} \right\} \text{(9 termes)}. \end{aligned}$$

Étant donnés deux angles dièdres AB , $A'B'$ et la surface S , si l'on mène par l'arête du premier un plan E , par l'arête du second un plan E' ,

$$I_{EE'} = \sum \frac{\sin EB \sin E'B'}{\sin AB \sin A'B'} I_{AA'} \quad (4 \text{ termes}).$$

Si le point p est commun aux deux plans E , E' , cette relation développée peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\sin AB \sin A'B'}{\sin EA \sin E'A'} \frac{I_{EE'}}{(p, B)(p, B')} \\ &= \frac{I_{AA'}}{(p, A)(p, A')} + \frac{I_{BB'}}{(p, B)(p, B')} \\ &\quad - \frac{I_{AB'}}{(p, A)(p, B')} - \frac{I_{BA'}}{(p, B)(p, A')}. \end{aligned}$$

Dans le cas où les plans A' , B' coïncident avec les plans B et A :

20. Deux plans A , B étant donnés, si, par leur intersection et un point p , on mène un plan E ,

$$\frac{2 I_{AB}}{(p, A)(p, B)} = \frac{I_A}{(p, A)^2} + \frac{I_B}{(p, B)^2} - \frac{\sin^2 AB}{\sin EA \sin EB} \frac{I_E}{(p, A)(p, B)}.$$

21. Ces résultats et d'autres peuvent se mettre sous forme de déterminants, comme il suit. Si, dans la relation (1) du n° 14, on désigne par E' le plan polaire du

point e , on trouve que cette relation peut s'écrire ainsi :

$$(3) \quad -(e', E') = \pi^2 \left[\frac{I_{ae'} I_{AE'}}{(a, A)} + \frac{I_{be'} I_{BE'}}{(b, B)} + \frac{I_{ce'} I_{CE'}}{(c, C)} + \frac{I_{de'} I_{DE'}}{(d, D)} \right];$$

elle donne la distance d'un point e' à un plan E' . Ce lemme posé, soit

$$X_r = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & I_{AC'} & I_{AD'} & (e, A) & (f, A) & \dots & (m, A) \\ I_{BA'} & I_{BB'} & I_{BC'} & I_{BD'} & (e, B) & (f, B) & \dots & (m, B) \\ I_{CA'} & I_{CB'} & I_{CC'} & I_{CD'} & (e, C) & (f, C) & \dots & (m, C) \\ I_{DA'} & I_{DB'} & I_{DC'} & I_{DD'} & (e, D) & (f, D) & \dots & (m, D) \\ (e', A') & (e', B') & (e', C') & (e', D') & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (f', A') & (f', B') & (f', C') & (f', D') & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (m', A') & (m', B') & (m', C') & (m', D') & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

La lettre r désignant le nombre des points $e, f, \dots, m, e', f', \dots, m'$; $(e, A), (e, B), (e, C), (e, D)$ sont les coordonnées du point e par rapport au tétraèdre $abcd$ ou $ABCD$; $(e', A'), (e', B'), (e', C'), (e', D')$ sont les coordonnées du point e' par rapport au tétraèdre $a'b'c'd'$ ou $A'B'C'D'$; de même pour les autres points.

Si nous désignons par Δ_r le déterminant $\begin{vmatrix} e & f & \dots & m \\ e' & f' & \dots & m' \end{vmatrix}$, nous aurons la relation

$$X_r = \pi^{2r} \nabla_4 \Delta_r, \quad \cdot$$

∇_4 ayant la valeur indiquée (n° 8). A cet effet, soit h' le $n^{ième}$ point du groupe $e'f' \dots m'$. Multiplions par $\pi^2 \frac{I_{ah'}}{(a, A)}$ les termes de la première ligne du déterminant X_r , par $\pi^2 \frac{I_{bh'}}{(b, B)}$ les termes de la deuxième ligne, par $\pi^2 \frac{I_{ch'}}{(c, C)}$ ceux de la troisième, et enfin par $\pi^2 \frac{I_{dh'}}{(d, D)}$ ceux de la quatrième. Aux éléments de la $n + 4^{ième}$ ligne

de X_r , ajoutons ceux des quatre premières, ainsi multipliées; si l'on a égard aux relations (1) et (3), on verra que cette $n + 4^{i\text{ème}}$ ligne sera

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \pi^2 I_{eh'} \quad \pi^2 I_{fh'} \quad \dots \quad \pi^2 I_{mh'}$$

c'est-à-dire qu'elle est formée de quatre zéros et de la $n^{i\text{ème}}$ colonne de Δ_r , dont chaque terme est multiplié par π^2 . La relation à démontrer résulte de cette nouvelle forme de X_r .

Si l'on a égard aux valeurs que prend Δ_r (n° 2) pour $r = 1, 2, 3, \dots$, on aura ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' et la surface S, si l'on forme le déterminant X_r :

1° Pour $r = 1$,

$$X_1 = \pi^2 \nabla_4 I_{ee'}$$

2° Pour $r = 2$, en désignant par $\varepsilon, \varepsilon'$ les droites $ef, e'f'$,

$$X_2 = \pi^4 \nabla_4 \varepsilon \cdot \varepsilon' I_{\varepsilon\varepsilon'}$$

3° Pour $r = 3$, en désignant par H, H' les plans des triangles $efg, e'f'g'$,

$$X_3 = 4 \pi^6 \nabla_4 \varepsilon f g \cdot \varepsilon' f' g' I_{HH'}$$

4° Pour $r = 4$,

$$X_4 = - 36 \pi^6 \nabla_4 \varepsilon f g h \cdot \varepsilon' f' g' h'$$

22. Posons maintenant

$$x_r = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} & I_{ad'} & (a, E) & (a, F) & \dots & (a, M) \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} & (b, E) & (b, F) & \dots & (b, M) \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} & (c, E) & (c, F) & \dots & (c, M) \\ I_{da'} & I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} & (d, E) & (d, F) & \dots & (d, M) \\ (a', E') & (b', E') & (c', E') & (d', E') & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (a', F') & (b', F') & (c', F') & (d', F') & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ (a', M') & (b', M') & (c', M') & (d', M') & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$\nabla_r = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_{EE'} & \mathbf{I}_{EF'} & \dots & \mathbf{I}_{EM'} \\ \mathbf{I}_{FE'} & \mathbf{I}_{FF'} & \dots & \mathbf{I}_{FM'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{I}_{ME'} & \mathbf{I}_{MF'} & \dots & \mathbf{I}_{MM'} \end{vmatrix}.$$

La lettre r désigne le nombre des plans $EF\dots M$, $E'F'\dots M'$ qui figurent dans le déterminant ∇_r ; les distances (a, E) , (b, E) , (c, E) , (d, E) sont les coordonnées du plan E par rapport au tétraèdre $abcd$; les distances (a', E') , (b', E') , (c', E') , (d', E') sont les coordonnées du plan E' par rapport au tétraèdre $a'b'c'd'$; de même pour les autres plans.

Entre ces deux déterminants existe la relation

$$x_r = \pi^{2r} \Delta_4 \nabla_r,$$

Δ_4 ayant la valeur indiquée (2). Cette relation se démontre d'une manière analogue à la précédente, en ayant égard aux égalités (2) et (3).

Si l'on a égard aux valeurs de ∇_r pour $r=1, 2, 3, 4$ (8), on aura ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ et la surface S , si l'on forme le déterminant x_r :

1° Pour $r=1$,

$$x_1 = \pi^2 \Delta_4 \mathbf{I}_{EE'};$$

2° Pour $r=2$, si l'on désigne par φ et φ' les droites déterminées par les plans EF , $E'F'$,

$$x_2 = -\pi^2 \Delta_4 \sin EF \sin E'F' \mathbf{I}_{FF'};$$

3° Pour $r=3$, si l'on désigne par h , h' les points déterminés par les plans EFG , $E'F'G'$, et par $\sin EFG$, $\sin E'F'G'$ les sinus des angles solides déterminés par les normales à ces plans :

$$x_3 = \pi^2 \Delta_4 \sin EFG \sin E'F'G' \mathbf{I}_{GG'};$$

4° Pour $r = 4$, si l'on désigne par U et U' les volumes des tétraèdres déterminés par les plans $EFGH$, $E'F'G'H'$ et par les mêmes lettres les aires de leurs faces :

$$x_4 = -\pi^2 \Delta_4 \frac{(3U)^3}{2EFGH} \frac{(3U')^3}{2E'F'G'H'}.$$

Remarques. — Lorsque les points e, e' sont conjugués à la surface S , $X_1 = 0$, de sorte que, si e' est un point fixe, l'équation représente le plan polaire de ce point e' , et si le point e' coïncide avec e , l'équation correspondante est une équation *par points* de la surface S .

Lorsque les droites $\varepsilon, \varepsilon'$ sont conjuguées à la surface S , $X_2 = 0$, de sorte que, si la droite ε' est fixe et déterminée par ses deux points e', f' , l'équation $X_2 = 0$ représentera le complexe formé par les droites qui rencontrent la polaire de ε' . Si les points e', f' coïncident avec les points e, f , l'équation correspondante représentera un complexe de droites toutes tangentes à la surface S . On peut dire que c'est une équation *par droites* de cette surface.

Lorsque les plans H, H' sont conjugués à la surface S , $X_3 = 0$, de sorte que, si le plan H' est fixe et déterminé par ses trois points e', f', g' , l'équation $X_3 = 0$ représentera tous les plans qui passent par le pôle du plan H . Si les points e', f', g' coïncident avec les points e, f, g , l'équation correspondante représentera tous les plans qui touchent la surface S . On peut dire que c'est une équation *par plans* de cette surface.

Remarquons que l'équation de notre surface S se trouve rapportée aux deux tétraèdres $abcd, a'b'c'd'$, ou à un système de huit plans. Lorsque les tétraèdres coïncideront, on retrouvera les formes connues.

Les diverses valeurs du déterminant x_r (22) donnent lieu à des remarques analogues.

*Indices par rapport à une sphère S.*23. Indice du système de deux points a, a' .

D'après (11) nous avons, R étant le rayon de la sphère S :

$$I_{aa'} = -1 - oa \cdot oa' I_{\gamma\gamma'};$$

or

$$I_{\gamma\gamma'} = -\frac{\cos a oa'}{R^2};$$

par conséquent

$$I_{aa'} = -1 + \frac{oa \cdot oa' \cos a oa'}{R^2}.$$

Concevons la sphère qui a pour diamètre le segment aa' et désignons par $p_{aa'}$ la puissance du centre de la sphère S par rapport à la sphère aa' :

$$I_{aa'} = -1 + \frac{p_{aa'}}{R^2}.$$

24. Indice du système de deux droites α, α' .

Nous avons (12), D, D' représentant les plans diamétraux menés par les droites α, α' :

$$I_{\alpha\alpha'} = I_{\alpha_0\alpha'_0} - (o, \alpha)(o, \alpha') I_{DD'}.$$

Or, dans la sphère,

$$I_{\alpha_0\alpha'_0} = -\frac{\cos \alpha\alpha'}{R^2}, \quad I_{DD'} = -\frac{\cos DD'}{R^4};$$

par conséquent

$$I_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos \alpha\alpha'}{R^2} + \frac{(o, \alpha)(o, \alpha') \cos DD'}{R^4};$$

d'après (5) on a aussi, $|\nu', \alpha'|$ indiquant la plus courte distance de la polaire ν' de la droite α à la droite α' multipliée par $\sin \nu' \alpha'$:

$$I_{\alpha\alpha'} = \frac{(o, \nu') |\nu', \alpha'|}{R^4}.$$

25. Indice du système de deux plans A, A'.

Nous avons (13) en général

$$I_{AA'} = I_{A_0A'_0} + \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2};$$

or, dans la sphère $I_{A_0A'_0} = -\frac{\cos AA'}{R'}$, en désignant par AA' l'angle formé par les normales aux plans A et A', donc

$$I_{AA'} = \frac{(o, A)(o, A') - R^2 \cos AA'}{R^6}.$$

Lorsque les plans A, A' coupent la sphère, on peut donner à cette expression une autre forme. Désignons par r, r' les rayons des petits cercles déterminés par les plans A, A'; par θ l'angle sous lequel se coupent ces petits cercles. Abaissons du centre o des perpendiculaires sur les plans A, A', et soient a, a' les points où elles percent la sphère; si le point m est un des points d'intersection des deux petits cercles, le triangle sphérique ama' donne

$$\cos aa' = \cos ma \cos ma' + \sin ma \sin ma' \cos ama';$$

or

$$(o, A) = -R \cos ma, \quad (o, A') = R \cos ma',$$

$$r = R \sin ma, \quad r' = R \sin ma', \quad \cos ama' = -\cos \theta,$$

de sorte que la relation précédente devient

$$R^2 \cos aa' = (o, A)(o, A') - rr' \cos \theta;$$

et, si l'on remarque que l'arc aa' sert de mesure à l'angle des plans A, A', on trouvera

$$I_{AA'} = \frac{rr' \cos \theta}{R^6}.$$

On doit remarquer que l'angle θ est nul lorsque les petits cercles se touchent extérieurement et qu'il est de

180 degrés lorsqu'ils se touchent intérieurement. Lorsque les plans A, A' sont conjugués, $I_{AA'} = 0$, par conséquent $\theta = 90^\circ$.

Relations entre deux groupes de m points.

Notations. — 26. Étant pris dans l'espace deux groupes de m points $abc\dots m, a'b'c'\dots m'$, posons

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \dots & I_{am'} & 1 \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \dots & I_{bm'} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{ma'} & I_{mb'} & \dots & I_{mm'} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par d_{rs} le carré de la distance rs divisé par le carré du demi-diamètre de S parallèle à la droite rs , nous poserons

$$a_m = \begin{vmatrix} d_{aa'} & d_{ab'} & \dots & d_{am'} \\ d_{ba'} & d_{bb'} & \dots & d_{bm'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{ma'} & d_{mb'} & \dots & d_{mm'} \end{vmatrix},$$

$$a'_m = \begin{vmatrix} d_{aa'} & d_{ab'} & \dots & d_{am'} & 1 \\ d_{ba'} & d_{bb'} & \dots & d_{bm'} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{ma'} & d_{mb'} & \dots & d_{mm'} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par b_{rs} le carré de la distance rs , posons

$$b_{rs} = \begin{vmatrix} aa' & ab' & \dots & am' \\ ba' & bb' & \dots & bm' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma' & mb' & \dots & mm' \end{vmatrix},$$

(310)

$$b'_m = \begin{vmatrix} aa' & ab' & \dots & am' & 1 \\ ba' & bb' & \dots & bm' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma' & mb' & \dots & mm' & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Déterminant Δ'_m .

27. Étant pris dans l'espace deux groupes de m points $abc\dots m$, $a'b'c'\dots m'$:

1° Le déterminant $\Delta'_m = 0$ pour m plus grand que 4.

2° Lorsque $m = 4$,

$$\Delta'_4 = - \frac{36abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par D_0, D'_0 les plans diamétraux parallèles aux plans D, D' des triangles $abc, a'b'c'$,

$$\Delta'_3 = 4abc.a'b'c'I_{D_0D'_0}.$$

4° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par γ_0, γ'_0 les diamètres parallèles aux droites γ, γ' qui joignent les points $ab, a'b'$

$$\Delta'_2 = ab.a'b'I_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Démonstration. — Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & m & o \\ a' & b' & c' & \dots & m' & o \end{vmatrix}$$

formé à l'aide des deux systèmes de $m+1$ points a, b, c, \dots, m, o ; $a'b'c'\dots m', o$; le dernier o étant le centre de la surface S . On a

$$I_{aa'} = I_{bb'} = \dots = I_{oo} = -1,$$

par conséquent

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} a & b & \dots & m & o \\ a' & b' & \dots & m' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \dots & m \\ a' & b' & \dots & m' \end{vmatrix}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 4, ces deux déterminants sont nuls.

2° Lorsque $m = 4$, le premier est nul, de sorte que

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = \Delta_4.$$

3° Lorsque $m = 3$,

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & o \\ a' & b' & c' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix};$$

or

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c & o \\ a' & b' & c' & o \end{vmatrix} &= -\frac{36oabc \cdot oa'b'c'}{\pi^2} \\ &= -\frac{4abc \cdot a'b'c'}{\pi^2} (o, D)(o, D'), \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 4abc \cdot a'b'c' I_{DD'}$$

et (13)

$$\Delta'_3 = 4abc \cdot a'b'c' \left[I_{DD'} - \frac{(o, D)(o, D')}{\pi^2} \right] = 4abc \cdot a'b'c' I_{D_o D'_o}.$$

4° Lorsque $m = 2$,

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} a & b & o \\ a' & b' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix};$$

or, en désignant par P, P' les plans oab , $oa'b'$

$$\begin{vmatrix} a & b & o \\ a' & b' & o \end{vmatrix} = 4oab \cdot oa'b' I_{PP'} = ab \cdot a'b' (o, \gamma)(o, \gamma') I_{PP'},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab \cdot a'b' I_{\gamma\gamma'},$$

de sorte que (12)

$$\Delta'_2 = ab \cdot a'b' [I_{\gamma\gamma'} + (o, \gamma)(o, \gamma') I_{PP'}] = ab \cdot a'b' I_{\gamma_o \gamma'_o}.$$

Déterminant a_m .

28. Étant pris sur une surface du second degré S deux groupes de m points $ab\dots m$; $a'b'\dots m'$:

1° Lorsque m est plus grand que 4, $a_m = 0$.

2° Lorsque $m = 4$,

$$a_4 = - \frac{24^2 abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° Lorsque $m = 3$,

$$a_3 = - 32 abc.a'b'c'I_{DD'}.$$

4° Lorsque $m = 2$,

$$a_2 = 4 ab.a'b'I_{rr'}.$$

Démonstration. — On a généralement (16)

$$2I_{rs} = I_r + I_s - d_{rs},$$

d_r , indiquant le carré du rapport de la distance des points r et s au demi-diamètre de la surface S parallèle à la droite rs .

Si les points r et s sont sur la surface $2I_{rs} = -d_{rs}$, de sorte que

$$a_m = (-2)^m \Delta_m,$$

les valeurs obtenues pour Δ_m donnent la démonstration du théorème.

Déterminant a'_m .

29. Étant pris dans l'espace deux groupes de m points quelconques $ab\dots m$, $a'b'\dots m'$:

1° Lorsque m est plus grand que 4, $a'_m = 0$.

2° Lorsque $m = 4$,

$$a'_4 = \frac{288 abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° Lorsque $m = 3$, si D_0, D'_0 représentent les plans diamétraux de la surface S parallèles aux plans $abc, a'b'c'$,

$$a'_3 = 16abc.a'b'c' I_{D_0 D'_0}.$$

4° Lorsque $m = 2$, si γ_0, γ'_0 représentent les diamètres de la surface S parallèles aux droites $ab, a'b'$,

$$a'_2 = -2ab.a'b' I_{\gamma_0 \gamma'_0}.$$

Démonstration. — Multiplions par -2 les termes du déterminant Δ'_m , sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne; le nouveau déterminant a pour valeur $(-2)^{m-1} \Delta'_m$. Ce déterminant ne change pas de valeur si aux éléments des $1, 2, \dots, m^{\text{ièmes}}$ lignes on ajoute le produit des éléments de la dernière respectivement par I_a, I_b, \dots, I_m ; et ensuite aux éléments des $1, 2, \dots, m^{\text{ièmes}}$ colonnes le produit des éléments de la dernière respectivement par $I_{a'}, I_{b'}, \dots, I_{m'}$. Le déterminant ainsi formé est celui que nous avons appelé a'_m à cause de la relation générale $2I_{rs} = I_r + I_s - d_{rs}$. On a donc

$$a'_m = (-2)^{m-1} \Delta'_m.$$

Déterminant b_m .

30. Dans le cas où la surface S est une sphère de rayon R , on a

$$d_{rs} = \frac{rs}{R^2},$$

rs indiquant le carré de la distance des points r et s ; on a par suite la relation $b_m = R^{2m} a_m$, d'où résulte :

Étant pris sur une sphère de rayon R deux groupes de m points $ab\dots m; a'b'\dots m'$:

1° Lorsque m est plus grand que 4, $b_m = 0$.

2° Lorsque $m = 4$,

$$b_4 = - (24 R)^2 abcd.a'b'c'd'.$$

3° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par D, D' les plans $abc, a'b'c'$,

$$b_3 = 32 abc.a'b'c' [R^2 \cos DD' - (o, D)(o, D')].$$

Si l'on désigne par p, p' les produits $a.b.c, a'.b'.c'$ des côtés des triangles $abc, a'b'c'$, par θ l'angle sous lequel se coupent les cercles $abc, a'b'c'$ de rayons r et r' ,

$$b_3 = - 2pp' \cos \theta = - 32 abc.a'b'c' rr' \cos \theta.$$

4° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par γ, γ' les directions $ab, a'b'$; par D, D' les plans diamétraux $oab, oa'b'$,

$$b_2 = 4 ab.a'b' [(o, \gamma)(o, \gamma') \cos DD' - R^2 \cos \gamma \gamma'].$$

Ce théorème se déduit immédiatement des valeurs de a_m en y remplaçant les indices $I_{DD'}, I_{\gamma\gamma'}$ par leurs valeurs relatives à la sphère (24) et (25).

Déterminant b'_m .

31. Dans le cas où la surface S est une sphère, on trouve, comme ci-dessus, $b'_m = R^{2(m-1)} a'_m$, et l'on obtient ce théorème indépendant de la sphère :

Étant pris arbitrairement dans l'espace deux groupes de m points $ab \dots m; a'b' \dots m'$:

1° Lorsque m est plus grand que 4,

$$b'_m = 0.$$

2° Lorsque $m = 4$,

$$b'_4 = 288 abcd.a'b'c'd'.$$

3° Lorsque $m = 3$, si l'on désigne par D et D' les plans des triangles abc , $a' b' c'$,

$$b'_3 = -16 abc . a' b' c' \cos(DD').$$

4° Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par γ, γ' les droites $ab, a' b'$,

$$b'_2 = 2 ab . a' b' \cos(\gamma, \gamma').$$

Ce théorème se déduit du déterminant a'_m en y remplaçant les indices $I_{D_0 D'_0}, I_{\gamma_0 \gamma'_0}$ par leurs valeurs relatives à la sphère.

32. Considérons deux groupes de $m + 1$ points $ab \dots mo; a' b' \dots m' o'$ et supposons les premiers $ab \dots m$ sur une sphère ayant pour centre le point o' , ceux du second groupe $a' b' \dots m'$ sur une sphère ayant pour centre le point o . A l'aide de ces points formons le déterminant

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} a & b & \dots & m & o \\ a' & b' & \dots & m' & o' \end{vmatrix},$$

les indices étant pris par rapport à la sphère o .

Les termes de la dernière ligne de ce déterminant $I_{oa'}, I_{ob'} \dots I_{oo'}$ sont tous égaux à -1 : par conséquent, si des termes de chaque colonne on retranche ceux de la dernière, on peut écrire

$$\Delta_{m+1} = - \begin{vmatrix} I_{aa'} - I_{ao'} & I_{ab'} - I_{ao'} & \dots & I_{am'} - I_{ao'} \\ I_{ba'} - I_{bo'} & I_{bb'} - I_{bo'} & \dots & I_{bm'} - I_{bo'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{ma'} - I_{mo'} & I_{mb'} - I_{mo'} & \dots & I_{mm'} - I_{mo'} \end{vmatrix}.$$

Or, R étant le rayon de la sphère o ,

$$2I_{aa'} = I_a + I_{a'} - \frac{aa'^2}{R^2}, \quad 2I_{ao'} = I_a + I_{o'} - \frac{ao'^2}{R^2},$$

d'où

$$2(I_{aa'} - I_{a'o'}) = I_{a'} - I_{o'} + \frac{\overline{ao'}^2 - \overline{aa'}^2}{R^2}.$$

Mais, par hypothèse, $I_{a'} = 0$, puisque le point a' est sur la sphère o ; de plus $ao' = R'$, puisque le point a est sur la

sphère o' de rayon R' et $I_{o'} = \frac{\overline{oo'}^2}{R^2} - 1$: donc

$$I_{aa'} - I_{a'o'} = \frac{R^2 - R'^2 - \overline{oo'}^2 - \overline{aa'}^2}{2R^2}.$$

Or, si les sphères se coupent sous l'angle θ ,

$$\overline{oo'}^2 = R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\theta;$$

de sorte que, si k représente le produit $2RR'\cos\theta$,

$$I_{aa'} - I_{a'o'} = -\frac{\overline{aa'}^2 - k}{2R^2};$$

on a des expressions analogues pour les autres éléments de Δ_{m+1} , de sorte que nous avons, en supprimant l'exposant 2, conformément à notre notation,

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} aa' + k & ab' + k & \dots & am' + k \\ ba' + k & bb' + k & \dots & bm' + k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma' + k & mb' + k & \dots & mm' + k \end{vmatrix} \frac{1}{(-2R^2)^m}$$

$$= \begin{vmatrix} aa' & ab' & \dots & am' & 1 \\ ba' & bb' & \dots & bm' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ma' & mb' & \dots & mm' & 1 \\ k & k & \dots & k & -1 \end{vmatrix} \frac{1}{(-2R^2)^m}.$$

D'après nos notations, nous avons donc

$$(-2R^2)^m \Delta_{m+1} = b_m + 2RR'\cos\theta b'_m,$$

ou bien

$$b_m = 2RR' \cos \theta b'_m - (-2R')^m \Delta_{m+1}.$$

Dans cette relation nous connaissons Δ_{m+1} et b'_m ; nous pouvons donc en déduire b_m et l'on a ce théorème :

Si l'on prend sur une sphère o de rayon R m points $a' b' \dots m'$, et sur une autre sphère o' de rayon R' m points $ab \dots m$, et que l'on forme le déterminant b_m :

1° Lorsque m est plus grand que 4,

$$b_m = 0.$$

2° Lorsque $m = 4$, θ étant l'angle sous lequel se coupent les sphères,

$$b_4 = -24^2 RR' abcd. a' b' c' d' \cos \theta.$$

3° Lorsque $m = 3$, en désignant par D, D' les plans des triangles $abc, a' b' c'$,

$$b_3 = -32abc. a' b' c' [RR' \cos DD' \cos \theta + (o, D)(o', D')].$$

4° Lorsque $m = 2$, en désignant par γ, γ' les directions $ab, a' b'$ et par D, D' les plans diamétraux $oab, o' a' b'$,

$$b_2 = 4ab. a' b' [RR' \cos \gamma \gamma' \cos \theta + (o, \gamma)(o', \gamma') \cos DD'].$$

Lorsque les sphères o, o' se touchent extérieurement, on fera $\cos \theta = +1$; si elles se touchent intérieurement, on fera $\cos \theta = -1$. et, si $R = R'$, on retombe sur le théorème (30); enfin, si les sphères se coupent orthogonalement, on fera $\cos \theta = 0$.

(A suivre.)