NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

W.-H. WISSELINK

Concours d'admission à l'École centrale (1875, 1re session)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 274-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__274_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1875, 1re SESSION)

(voir 2e série, t. XIV, p. 427);

SOLUTION DE M. W.-H. WISSELINK,

A Heerenween (Pays-Bas).

Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, *et sur l'axe* OX *un point* A, *on considère les hyperboles équilatères qui passent par le point* A, *et dont l'une des directrices est l'axe* OY. *On demande :*

1° *Le lieu de celui des foyers de ces hyperboles qui correspond à la directrice* OY ;

2° *Le lieu des centres de ces mêmes hyperboles ;*

3° *Le lieu de leurs sommets.*

Prenons pour axes de coordonnées les droites OX, OY, et nommons α, 6 les coordonnées du foyer qui correspond à la directrice OY.

L'équation générale des courbes du second degré, ayant OY pour directrice et le point (α, 6) pour foyer, est

$$\frac{(x-\alpha)^2+(y-6)^2}{x^2}=e^2$$

ou

$$(1-e^2)x^2+y^2-2\alpha x-26y+\alpha^2+6^2=0.$$

Pour que cette équation soit celle d'une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que $(1-e^2)+1=0$, d'où $e^2=2$. Il s'ensuit que l'équation

$$(1)\qquad x^2-y^2+2\alpha x+2\beta y-\alpha^2-\beta^2=0$$

représente toutes les hyperboles équilatères dont OY est une directrice, et le point (α, β) le foyer correspondant.

Soit $OA=p$; les coordonnées du point A seront p et o, et, comme elles doivent vérifier l'équation (1), on aura

$$(2)\qquad \alpha^2+\beta^2-2p\alpha-p^2=0;$$

et, en remplaçant α, β par x, y,

$$x^2+y^2-2px-p^2=0$$

ou

$$(3)\qquad (x-p)^2+y^2=2p^2,$$

équation d'une circonférence, dont les coordonnées du centre sont p et o, et dont le rayon est égal à $p\sqrt{2}$; par conséquent :

1° *Le lieu de celui des foyers des hyperboles considerées qui correspond à la directrice* OY est une circonférence qui a pour centre le point donné A et pour rayon $OA\sqrt{2}$ (*).

Les coordonnées du centre de l'hyperbole représentée

(*) Cela résulte, en effet, de cette proposition connue, que si d'un point A d'une hyperbole on mène, parallèlement aux asymptotes, des droites AD, AD′ rencontrant une directrice OY en D et D′, ces droites sont égales à la distance AF du même point A au foyer F, correspondant à la directrice OY.

Quand l'hyperbole est équilatère, l'angle DAD′ est droit, et le triangle rectangle isoscèle DAD′ donne

$$AD=OA\sqrt{2},\quad \text{d'où}\quad AF=OA\sqrt{2}.\qquad \text{(G.)}$$

par l'équation

$$(1) \qquad x^2 - y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

s'obtiennent au moyen des équations dérivées

$$x + \alpha = 0, \quad y - \beta = 0.$$

En éliminant α, β entre ces deux équations et l'équation

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - 2p\alpha - p^2 = 0,$$

on a

$$x^2 + y^2 + 2px - p^2 = 0,$$

ou

$$(x + p)^2 + y^2 = 2p^2.$$

Donc .

2° *Le lieu des centres des hyperboles considérées* est une circonférence ayant pour centre le point symétrique du point donné A, par rapport à la directrice OY; le rayon de cette circonférence est égal à OA $\sqrt{2}$ (*).

3° On sait que les tangentes aux sommets d'une hyperbole sont parallèles aux directrices; ainsi, dans le cas actuel, ces tangentes sont parallèles à l'axe OY des ordonnées, et leur coefficient angulaire est infini; ce qui exige que les coordonnées des sommets de l'hyperbole représentée par l'équation (1), réduisent à zéro la dérivée du premier membre de cette équation, prise par rapport à y, ce qui donne

$$(4) \qquad -y + \beta = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \beta.$$

En éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (4),

(*) C'est une consequence immediate de ce que le centre d'une hyperbole equilatère et un foyer sont deux points symetriques par rapport a la directrice OY correspondant au foyer. Il s'ensuit evidemment que les lieux geometriques du centre et du foyer sont, de même, symétriques par rapport a la directrice. (G) on trouve, pour le lieu géométrique des sommets, l'équation (double)

$$(3 \pm 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 \pm \sqrt{2})x - p^2 = 0, \tag{5}$$

qui représente deux ellipses (*).

Note. — M. Lez a résolu la même question.