NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TOURRETTES

Question proposée au concours général de mathématiques spéciales (1875), solution analytique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 269-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__269_1>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1875),

SOLUTION ANALYTIQUE;

PAR M. A. TOURRETTES.

On donne un ellipsoïde, un plan et un point dans ce plan. On demande le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde, et dont la trace dans le plan donné admet le point donné pour foyer.

Je prends le plan des xy parallèle au plan donné et passant par le centre de l'ellipsoïde; dans ce plan, je prends pour ox, oy les axes de la section et pour oz un diamètre conjugué du plan xy.

L'ellipsoïde aura pour équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et le plan donné $z=h$.

Soient α, β, γ les coordonnées du sommet d'un des cônes circonscrits, son équation sera

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Prenons son intersection avec le plan $z=h$, et développons :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)x^2-\frac{2\alpha\beta}{a^2b^2}xy \\ &+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)y^2-2\frac{\alpha}{a^2}\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)x \\ &-2\frac{\beta}{b^2}\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)y \\ &+\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)^2=0. \end{aligned}\right.$$

C'est l'équation de la projection de l'intersection sur le plan xy; exprimons qu'elle admet pour foyer le point (x_0, y_0).

Or, étant donnée l'équation générale

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

on a les foyers par la résolution des deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} (B^2 - AC)xy + (BD - AE)x \\ \quad + (BE - CD)y + BF - DE = 0, \\ (B^2 - AC)(x^2 - y^2) + 2(BE - CD)x \\ \quad - 2(BD - AE)y + (A - C)F + E^2 - D^2 = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles x, y sont les coordonnées d'un foyer.

Formons les coefficients des deux équations

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= -\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) \\ &= -H\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$H = \frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right),$$

$$BD - AE = H\beta\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right), \quad BE - CD = H\alpha\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right),$$

$$BF - DE = -H\alpha\beta\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right),$$

$$\begin{aligned} &(A - C)F + E^2 - D^2 \\ &\quad = H\left\{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)\left[(\beta^2 - \alpha^2) - (a^2 - b^2)\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + (a^2 - b^2)\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right)^2\right\} \\ &\quad = H\left[\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{a^2 - b^2}{c^2}(\gamma - h)^2\right]. \end{aligned}$$

Je substitue ces valeurs dans les équations (3); j'exprime qu'elles sont satisfaites par les coordonnées x_0, y_0, et je supprime le facteur $\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = H$, qui, égalé à zéro, donne l'ellipsoïde proposé. Il vient alors

$$\begin{gathered}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)x_0y_0+\beta\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)x_0\\ +\alpha\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)y_0-\alpha\beta\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\left(\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)(x_0^2-y_0^2)+2\alpha\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)x_0\\ -2\beta\left(\frac{\gamma h}{c^2}-1\right)y_0+\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)(\beta^2-\alpha^2)\\ +\frac{a^2-b^2}{c_2}(\gamma-h)^2=0.\end{gathered}$$

Ce sont les équations du lieu demandé. Remplaçons α, β, γ par x, y, z et ordonnons, il vient

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&x_0y_0\frac{z^2}{c^2}+\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)xy-\frac{hx_0}{c_2}yz-\frac{hy_0}{c^2}xz\\ &\qquad+x_0y+y_0x-x_0y_0=0.\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)(y^2-x^2)+(a^2-b^2-x_0^2+y_0^2)\frac{z^2}{c^2}\\ &\qquad-2\frac{hy_0}{c^2}yz+2\frac{hx_0}{c^2}xz-2x_0x+2y_0y\\ &\qquad-2\frac{a^2-b^2}{c^2}hz+(x_0^2-y_0^2)+\frac{a^2-b^2}{c^2}h^2=0.\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées du centre sont, dans les deux surfaces (4) et (5),

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=h;$$

c'est le point fixe. Si nous transportons l'origine en ce point, nous trouvons

$$x_0y_0\frac{z^2}{c^2}+\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)xy-\frac{hx_0}{c^2}yz-\frac{hy_0}{c^2}xz=0,$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)(y^2-x^2)+(a^2-b^2-x_0^2+y_0^2)\frac{z^2}{c^2}\\ -\frac{2hy_0}{c^2}yz+\frac{2hx_0}{c^2}xz=0.\end{gathered}$$

Ces équations représentent deux cônes concentriques. En les coupant par le plan $z = \lambda$, on trouve deux hyperboles équilatères concentriques : la première a pour asymptotes deux parallèles aux axes des coordonnées; la deuxième a pour asymptotes les parallèles aux bissectrices des axes menés par le centre commun. Il est alors visible que ces deux hyperboles se coupent en deux points réels, et en deux points imaginaires. Par suite, le lieu demandé est l'ensemble de deux droites réelles passant par le point donné $x_0 y_0 h$.