

THÉODORE PARMENTIER

**Simplification de la méthode d'interpolation  
de Thomas Simpson**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 241-251

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__241_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

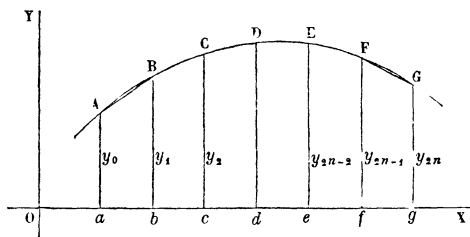
<http://www.numdam.org/>

## SIMPLIFICATION DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION DE THOMAS SIMPSON ;

PAR M. LE GÉNÉRAL THÉODORE PARMENTIER,  
Ancien élève de l'École Polytechnique.

On a souvent à évaluer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, deux ordonnées et l'arc d'une courbe dont l'équation n'est pas connue ou pour laquelle l'expression différentielle de l'aire  $f(x) dx$  n'est pas intégrable. On est alors obligé de ne considérer qu'un certain nombre de points de la courbe et de recourir à une formule d'interpolation.

L'une des plus célèbres est celle de Thomas Simpson, dont la méthode consiste à diviser la base  $ag$  de l'aire à



calculer en un nombre pair de parties égales ; puis, après avoir mené les ordonnées des points de division  $a, b, c, \dots, g$ , à remplacer la courbe par une série d'arcs de paraboles du second degré à axes parallèles aux ordonnées, passant successivement par les extrémités des trois premières ordonnées ; des troisième, quatrième et cinquième ; et ainsi de suite jusqu'aux trois dernières. En appelant  $h$  l'équidistance des ordonnées, les aires des

trapèzes paraboliques  $aACc, cCEe, \dots$  ont pour expressions

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ & \frac{1}{3} h (y_2 + 4y_3 + y_4), \dots, \\ & \frac{1}{3} h (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}), \end{aligned}$$

et leur somme, que l'on peut prendre pour l'aire de la courbe donnée, est

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{3} h [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad S = \frac{1}{3} h [4 \Sigma y_i + 2 \Sigma y_p - (y_0 + y_{2n})],$$

en désignant par  $\Sigma y_i$  la somme de toutes les ordonnées de rang pair (ou d'indice impair), et par  $\Sigma y_p$  la somme de toutes les ordonnées de rang impair (ou d'indice pair).

Telle est la formule de Simpson qui, malgré son ancienneté et les nombreuses tentatives faites pour la remplacer par d'autres, donne encore, dans la plupart des cas, le résultat le plus approché. Malheureusement elle est assez longue et fatigante à appliquer, ce qui lui fait souvent préférer dans la pratique des formules incontestablement moins exactes, telles que celle de Poncelet

$$(2) \quad S = h \left( 2 \Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{4} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{4} \right).$$

On voit tout de suite que, tandis que la formule de Simpson exige la connaissance de la valeur numérique de  $2n + 1$  ordonnées, on n'a besoin d'en connaître que  $n + 2$  pour appliquer la formule de Poncelet, qui ne renferme pas d'ordonnées d'indice pair autres que les deux extrêmes.

La manière dont les ordonnées de rang pair et celles

de rang impair entrent dans la formule de Simpson donne le moyen d'éliminer  $\Sigma y_i$  ou  $\Sigma y_p$  entre cette formule et une autre que l'on formerait d'une manière analogue au moyen d'arcs de paraboles croisant les premiers, c'est-à-dire menés par les extrémités des ordonnées  $(y_1, y_2, y_3)$ ,  $(y_3, y_4, y_5)$ ,  $\dots$ ,  $(y_{2n-3}, y_{2n-2}, y_{2n-1})$ , sauf à compléter l'expression de l'aire approchée en ajoutant les deux trapèzes rectilignes extrêmes  $aABb, fFGg$ . Cette aire, que nous appellerons *auxiliaire*, aura pour expression

$$\frac{1}{3} h (y_1 + 4y_2 + y_3) + \frac{1}{3} h (y_3 + 4y_4 + y_5) + \dots \\ + \frac{1}{3} h (y_{2n-3} + 4y_{2n-2} + y_{2n-1}) + h \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} \right)$$

ou, toutes réductions faites,

$$(3) \quad S = \frac{1}{3} h [2 \Sigma y_i + 4 \Sigma y_p - \frac{1}{2} (y_0 + y_{2n}) + \frac{1}{2} (y_1 + y_{2n-1})].$$

Les formules (1) et (3) donnent chacune une valeur approchée de l'aire de la courbe. Appelons, pour les distinguer,  $S_1$  et  $S_2$  ces valeurs approchées de l'aire véritable  $S$ . On voit qu'on peut obtenir une autre valeur approchée de  $S$  en prenant  $2S_1 - S_2$  ou  $2S_2 - S_1$ , ce qui permet de faire disparaître à volonté  $\Sigma y_p$  ou  $\Sigma y_i$ . Il sera d'ailleurs plus avantageux d'éliminer  $\Sigma y_p$ ; car il est clair que la formule (2) donne un résultat moins exact que celle de Simpson, puisqu'on s'est contenté pour les deux éléments extrêmes de l'approximation grossière du trapèze inscrit, et il vaut mieux prendre deux fois la valeur la plus approchée pour en retrancher la moins approchée que de faire l'opération inverse. Prenons donc

$$S_3 = 2S_1 - S_2.$$

Il viendra, toutes réductions faites,

$$(4) \quad S_3 = h \left( 2 \Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6} \right).$$

On est ainsi parvenu à éliminer de la formule de Simpson les ordonnées d'indice pair, à l'exception des deux extrêmes  $y_0$  et  $y_{2n}$ .

Or cette formule (4) est précisément celle que j'ai donnée d'abord dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* (N° 16, 1854, p. 290), puis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIV, 1855, p. 370), comme un perfectionnement de la formule de Poncelet, dont elle a la forme et les avantages tout en étant plus exacte, ainsi que le général Poncelet a bien voulu le reconnaître lui-même, et comme il est facile de s'en convaincre en relisant (*loc. cit.*) les considérations analytiques qui m'ont conduit à modifier la formule (2).

J'ai dit, à la fin du travail que je viens de citer, que la comparaison entre les formules (1) et (4) me paraissait difficile à faire et que je ne pouvais me prononcer sur leur mérite relatif, mais que néanmoins je croyais que ma nouvelle formule ne le cédait pas en exactitude à celle de Simpson. La manière nouvelle et toute différente d'arriver à la formule (4), que je viens d'exposer, permet, aujourd'hui, de se rendre assez bien compte du degré d'exactitude relative que l'on doit attribuer aux deux formules dont il s'agit.

En effet, la relation  $S_3 = 2S_1 - S_2$  ou  $2S_1 = S_2 + S_3$  montre que l'aire de Simpson est la moyenne arithmétique entre l'aire *auxiliaire* de la formule (3) et celle de la formule (4). Or, entre  $y_1$  et  $y_{2n-1}$ , il n'y a aucune raison de supposer *a priori* que les paraboles de Simpson conduisent à un résultat plus ou moins approché que celles de l'aire auxiliaire : les deux méthodes, quoique ne conduisant pas à des résultats identiques, doivent être regardées comme absolument équivalentes au point de vue de leur exactitude. Mais, entre  $y_0$  et  $y_1$ , ainsi qu'entre  $y_{2n-1}$  et  $y_{2n}$ , l'aire auxiliaire pour laquelle on s'est contenté de

remplacer la courbe par ses cordes donne une approximation beaucoup plus grossière que celle de Simpson et, dans le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, une valeur sensiblement plus petite que l'aire parabolique et que celle de la courbe donnée. On peut donc admettre que généralement l'aire auxiliaire est un peu plus petite que celle de Simpson (\*) et que, par suite, celle de la formule (4) est un peu plus grande. Mais la formule de Simpson donne presque toujours un résultat trop faible : l'aire de la formule (4) pourra donc s'approcher davantage de celle de la courbe. Les exemples numériques que nous avons rassemblés dans les deux tableaux suivants montrent qu'il en est souvent ainsi :

---

(\*) Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'excès de l'aire auxiliaire sur celle de Simpson entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_{2n-1}$  fût plus grand que la somme des deux segments paraboliques extrêmes AB, FG. Or la différence entre ces aires, résultant de la double manière de déterminer les arcs paraboliques (différence qui sera tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre), ne peut être que très-faible. On ne comprend donc guère que l'aire auxiliaire puisse surpasser celle de Simpson. Cela ne s'est, en effet, présenté dans aucun des huit exemples numériques dont il va être question et dans lesquels l'aire de la formule (4) est toujours plus grande ou plus petite que celle de Simpson, suivant que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses.

TABLEAU N° 1. — Courbes concaves vers l'axe des abscisses.

COURBES.	AIRE EXACTE.	FORMULE	FORMULE NOUVELLE	FORMULE	
		de Poncelet, 7 ordonnées.	( formule 4 ), 7 ordonnées,	de Simpson, 11 ordonnées,	
la base étant partagée en 10 parties égales.					
1. Quart de cercle (R = 10) : $y = \sqrt{20x - x^2}$ entre $x = 0$ et $x = 10$ .	Aire.....	78,540	78,221	78,580	78,174
	Erreur.....	"	+0,319	-0,040	+0,366
	N° d'ordre d'ap- proximation..	"	2	1	3
2. Parabole (axe horizontal) : $y^2 = 9x$ entre $x = 0$ et $x = 10$ .	Aire.....	63,245	63,054	63,263	63,001
	Erreur.....	"	+0,191	-0,018	+0,244
	N° d'ordre.....	"	2	1	3
3. Hyperbole (axe réel horiz.) : $y = \sqrt{20x + x^2}$ entre $x = 0$ et $x = 10$ .	Aire.....	107,3571	107,0910	107,3758	106,9957
	Erreur.....	"	+0,2661	-0,0187	+0,3614
	N° d'ordre.....	"	2	1	3
4. Sinusoïde : $y = \sin x$ entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ .	Aire.....	1,000000	0,998465	1,000351	1,000006
	Erreur.....	"	+0,001535	-0,000351	-0,000006
	N° d'ordre.....	"	3	2	1

( 246 )

TABLEAU N° 2. — Courbes convexes vers l'axe des abscisses.

COURBES.	AIRE EXACTE.	FORMULE	FORMULE NOUVELLE	FORMULE	
		de Poncelet, 7 ordonnées,	(formule 4), 7 ordonnées,	de Simpson, 11 ordonnées,	
la base étant partagée en 10 parties égales.					
5. Parabole (axe vertical) : $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$ .	Aire.....	0,3333	0,3345	0,3330	0,3333
	Erreur.....	"	-0,0012	+0,0003	(aire exacte)
	N° d'ordre....	"	3	2	1
6. Hyperbole équilatère : $y = \frac{1}{x}$ entre $x = 1$ et $x = 2$ .	Aire.....	0,693147	0,693523	0,692984	0,693150
	Erreur .. . . .	"	-0,000376	+0,000163	-0,000003
	N° d'ordre....	"	3	2	1
7. Courbe hyperbolique : $y = \frac{1}{x^2}$ entre $x = 2$ et $x = 3$ .	Aire.. . . . .	0,1666667	0,1667608	0,1666321	0,1666669
	Erreur.....	"	-0,0000941	+0,0000346	-0,0000002
	N° d'ordre....	"	3	2	1
8. Cycloïde : $y = \text{arc cos}(1-x) - \sqrt{2x-x^2}$ entre $x = 0$ et $x = 2$ .	Aire.....	1,570796	1,588381	1,568381	1,591506
	Erreur.....	"	-0,017585	+0,002415	-0,020710
	N° d'ordre . . .	"	2	1	3

( 247 )



On peut faire sur l'ensemble des huit exemples traités dans les tableaux ci-dessus les remarques suivantes (\*) :

1° La formule de Poncelet donne toujours un résultat trop faible ou trop fort comme ferait la simple aire inscrite, suivant que la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe des abscisses; la formule (4) conduit, au contraire, à un résultat trop fort ou trop faible dans les mêmes circonstances que l'aire circonscrite. Quant à l'erreur de la formule de Simpson, elle est *généralement* de même signe que celle de la formule de Poncelet et de signe contraire à celle de la formule (4).

2° La formule (4), qui donne toujours un résultat plus approché que celle de Poncelet, partage, sous le rapport de l'exactitude, le premier rang à peu près également avec la formule de Simpson; on peut même dire qu'elle a pour elle la probabilité d'une plus grande exactitude, car, lorsqu'elle quitte le premier rang, elle garde le second, tandis que la formule de Simpson, remarquablement exacte dans certains cas, accuse de bien plus grands écarts, puisqu'elle descend au troisième rang chaque fois qu'elle n'occupe pas le premier.

On peut donc légitimement conclure que la formule (4) joint l'exactitude de la formule de Simpson, dont elle ne diffère pas essentiellement, à la simplicité de celle de Poncelet, dont elle a gardé la forme.

On a souvent attaché, avec raison, une certaine importance à la limite déterminée par Poncelet pour l'erreur à laquelle peut conduire l'emploi de sa formule. Rappelons qu'on obtient cette formule en prenant la

---

(\*) Ces huit exemples pourraient, à la vérité, être réduits à cinq bien distincts, à cause de la grande analogie qui règne entre les trois premiers, ainsi qu'entre le sixième et le septième; mais nos conclusions ne seraient pas modifiées par la suppression des exemples n<sup>os</sup> 2, 3 et 7.



La formule (4) a été obtenue en prenant  $\frac{A + 2A'}{3}$ , A et A' ayant les mêmes valeurs que ci-dessus. Il est évident que ces aires et les moyennes qui ont conduit aux formules (2) et (4) se présentent dans l'ordre de grandeur suivant :

$$A, \quad \frac{A + A'}{2}, \quad \frac{A + 2A'}{3}, \quad A'.$$

L'aire exacte, toujours plus rapprochée de A' que de A, ne peut se trouver qu'entre  $\frac{A + A'}{2}$  et  $\frac{A + 2A'}{3}$ , ou entre  $\frac{A + 2A'}{3}$  et A'. Dans le premier cas, l'erreur est moindre que  $\frac{A + 2A'}{3} - \frac{A + A'}{2}$  ou  $\frac{1}{6}(A' - A)$  et, dans le second, elle est moindre que  $A' - \frac{A + 2A'}{3}$  ou  $\frac{1}{3}(A' - A)$ . On peut donc affirmer que  $\varepsilon < \frac{1}{3}(A' - A)$ , ce qui donne

$$\lim \varepsilon = h \left( \frac{y_1 + y_{m-1}}{6} - \frac{y_0 + y_m}{6} \right)$$

ou

$$\lim \varepsilon = \frac{1}{3} h . MN.$$

Sous ce rapport la formule (4) n'a donc rien à envier, non plus, à celle de Poncelet.

*Note.* — Le général Piobert est arrivé de son côté à la formule (4) par des considérations absolument différentes de celles qui m'ont guidé. Comme son travail a paru dans le tome XIII (1854) des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 323, tandis que le mien n'a été inséré que dans le tome XV (1855), qu'il me soit permis d'établir ici mon droit de priorité.

Ainsi que je l'ai dit ci-dessus, ma formule a été publiée pour la première fois dans le n° 16 du *Mémorial de l'Officier du Génie* qui porte le millésime de 1854. Employé au Dépôt des fortifications, j'avais été chargé en 1853 de la mise en ordre et de la publication des *Mémoires* composant le *Mémorial*, et le n° 16 a paru vers le milieu de 1854, car il était entièrement imprimé avant ma nomination d'aide de camp du

général Niel, avec lequel je partais de Paris le 11 juillet pour l'expédition de la Baltique. Or, ce n'est que dans le fascicule de septembre des *Nouvelles Annales* qu'a été publiée la communication de Piobert qui, vraisemblablement d'ailleurs, n'avait pas connaissance du numéro du *Mémorial de l'Officier du Génie* qui venait de paraître. Th. P.