

P. BARBARIN

**Concours d'admission à l'École centrale  
(1875). Composition d'octobre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 210-212

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_210\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__210_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1875).**

COMPOSITION D'OCTOBRE.

PAR M. P. BARBARIN,

Élève en mathématiques spéciales au lycée Henri IV (\*).

*Étant donné un cercle O, un diamètre fixe AB de ce cercle et une corde CD parallèle à une direction déterminée, on demande :*

1° *L'équation générale des hyperboles équilatères passant aux quatre points A, B, C, D;*

2° *Le lieu des points de contact des tangentes à ces hyperboles, perpendiculaires à la direction fixe;*

3° *Le lieu des sommets du lieu précédent, qui est une conique, quand la direction donnée varie.*

1° En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le centre O du cercle donné et pour axe des  $x$  le diamètre  $AB = 2R$ , l'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Et, si  $a$  désigne le coefficient angulaire de la direction donnée, la corde CD est représentée par l'équation

$$y - ax - b = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation générale des coniques passant aux quatre points A, B, C, D est

$$x^2 + y^2 - R^2 + \lambda(y - ax - b)y = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit celle d'une hy-

---

(\*) M. P. Barbarin est maintenant élève à l'École Normale supérieure.

perbole équilatère, il faut et il suffit que

$$1 + \lambda = -1, \text{ d'où } \lambda = -2;$$

donc l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent par les quatre points A, B, C, D est

$$(1) \quad x^2 - y^2 + 2axy + 2by - R^2 = 0.$$

2° Les points de contact des tangentes à ces hyperboles, perpendiculaires à la direction fixe, appartiennent au diamètre qui a pour équation

$$x + ay - \frac{1}{a}(-y + ax + b) = 0$$

ou

$$(2) \quad (a^2 + 1)y - b = 0.$$

En éliminant  $b$  entre les équations (1) et (2), il vient

$$(3) \quad x^2 + (2a^2 + 1)y^2 + 2axy - R^2 = 0.$$

C'est l'équation du lieu des points de contact; elle représente une ellipse, ayant son centre à l'origine et passant aux points A, B.

3° Les axes sont déterminés par l'équation

$$(4) \quad y^2 - 2axy - x^2 = 0.$$

L'élimination de  $a$  entre (3) et (4) conduit à l'équation du lieu des sommets de l'ellipse, quand la direction donnée varie.

L'équation (4) donne

$$a = \frac{y^2 - x^2}{2xy};$$

en portant cette valeur dans l'équation (3), on a

$$x^2 + \left[ \frac{(x^2 - y^2)^2}{2x^2y^2} + 1 \right] y^2 + \frac{y^2 - x^2}{xy} xy - R^2 = 0,$$

d'où

$$2x^4 + x^4 + y^4 + 2x^2(y^2 - x^2) - 2R^2x^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R^2x^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché. On voit qu'elle se dédouble en celles de deux cercles

$$x^2 - y^2 + Rx\sqrt{2} = 0,$$

$$x^2 - y^2 - Rx\sqrt{2} = 0,$$

tangents à l'axe des  $y$ , à l'origine, ayant leurs centres sur l'axe des  $x$  et dont les rayons sont égaux à  $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ .