NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 19-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__19_1>

THÉORÈMES NOUVEAUX SUR LA PARABOLE ET L'HYPERBOLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

En prenant l'équation de la parabole rapportée à des axes rectangulaires sous la forme

$$y = x^2,$$

l'aire d'un triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ est, en désignant par x_1, x_2, x_3 les abscisses des sommets, donnée par la formule

$$P_1 P_2 P_3 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix},$$

et, d'après un théorème connu,

$$P_1 P_2 P_3 = -\tfrac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Les coordonnées du pôle Q_1 de la corde $P_2 P_3$ sont respectivement $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ et $x_2 x_3$, et, par suite, l'aire du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$, correspondant au triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$, est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = \tfrac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \\ x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \end{vmatrix},$$

et l'on trouve aisément, en retranchant les deux dernières lignes de la première,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -\tfrac{1}{2} P_1 P_2 P_3.$$

On conclut de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *L'aire du triangle formé par trois tangentes à la parabole est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle formé par les trois points de contact.*

Désignons par R_1 le point de contact de la tangente parallèle à $P_2 P_3$: l'abscisse x' de ce point est égale à $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, et, en remplaçant x_i par x'_i dans l'expression de $P_1 P_2 P_3$, on en conclut la valeur de $R_1 R_2 R_3$, et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *L'aire du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

Si, par le point P_1, on mène une parallèle à $P_2 P_3$, cette droite rencontre la parabole en un point S_1 dont l'abscisse x''_1 est égale à $x_2 + x_3 - x_1$, et en remplaçant, dans l'expression de $P_1 P_2 P_3$, x_i par x''_i, on en conclut l'aire de $S_1 S_2 S_3$, et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, ces droites rencontrent la parabole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.*

Les coordonnées du pôle de $P_1 S_1$ sont respectivement

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y = x_1(x_2 + x_3 - x_1).$$

et l'aire du triangle formé par les trois pôles a pour expression

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_1(x_2 + x_3 - x_1) & 1 \\ x_3 + x_1 & x_2(x_3 + x_1 - x_2) & 1 \\ x_1 + x_2 & x_3(x_1 + x_2 - x_3) & 1 \end{vmatrix},$$

et, en retranchant les deux dernières lignes de la première, on obtient :

THÉORÈME IV. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, les pôles de ces droites forment un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.*

En désignant par T_1 et U_1 les points de contact des tangentes parallèles à $P_1 R_1$ et $R_1 S_1$, les triangles $T_1 T_2 T_3$, $U_1 U_2 U_3$, les triangles formés par les pôles de $P_1 R_1$, $P_1 T_1$, $P_1 U_1$, $R_1 S_1$,... et par les pôles analogues, ainsi que les triangles formés par les points de contact des tangentes parallèles à ces diverses droites et aux droites analogues, donnent lieu à un grand nombre de théorèmes semblables à ceux que nous avons indiqués, et dont les démonstrations fournissent ainsi des exercices curieux et variés sur la théorie des déterminants.

Considérons maintenant deux triangles $A_1 A_2 A_3$ et $P_1 P_2 P_3$ inscrits à la parabole, et désignons par a_1, a_2, a_3 et x_1, x_2, x_3 les abscisses de ces points. Menons par le point A_1 une parallèle à $P_2 P_3$, et désignons par B_1 son point d'intersection avec la parabole ; l'abscisse de ce point est égale à $x_2 + x_3 - a_1$, et l'aire du triangle $B_1 B_2 B_3$ a pour expression

$$\frac{1}{2}(a_2 + x_2 - a_3 - x_3)(a_3 + x_3 - a_1 - x_1)(a_1 + x_1 - a_2 - x_2).$$

Menons maintenant par le point P_1 une parallèle à $A_2 A_3$, et désignons par C_1 son point d'intersection avec la parabole; l'abscisse de ce point est égale à $a_2 + a_3 - x_1$, et l'aire du triangle $C_1 C_2 C_3$ est égale à celle de $B_1 B_2 B_3$.

Désignons enfin par D_1 le point de contact de la tangente parallèle à $A_1 P_1$; l'abscisse de ce point est égale à $\frac{1}{2}(a_1 + x_1)$, et, par suite, l'aire du triangle $D_1 D_2 D_3$ est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle $B_1 B_2 B_3$; de là le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si deux triangles sont inscrits à la parabole, et si par les sommets de chacun d'eux on mène des parallèles aux côtés correspondants du second, ces parallèles rencontrent la parabole en six points formant deux triangles dont l'aire est la même et égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles donnés.*

Ce théorème comprend un très-grand nombre de cas particuliers, lorsqu'un ou plusieurs des sommets de ces triangles coïncident; si A_1, A_2, A_3 coïncident, on a ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Si, par un point de la parabole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, et si par les sommets de ce triangle on mène des parallèles à la tangente au point donné, ces parallèles rencontrent la parabole en six nouveaux points formant deux triangles équivalents dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent le point donné aux sommets du triangle donné.*

Le théorème précédent s'applique d'ailleurs facilement à un polygone concave ou convexe, d'un nombre quelconque de côtés, et les aires des polygones formés sont en raison constante avec le polygone donné.

On peut trouver encore des théorèmes analogues sur les pôles des droites considérées dans les deux théorèmes précédents.

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit $P_1 P_2 P_3 P_4$; nous avons, par définition (*),

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = P_1 P_2 P_3 + P_1 P_3 P_4,$$

et, en nous reportant à l'aire du triangle inscrit à la parabole,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4);$$

si nous remplaçons dans cette formule x_i par $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à $P_i P_{i+1}$, et si nous remarquons que le dernier facteur s'annule, nous obtenons le théorème suivant, qui contient un certain nombre de corollaires pour le trapèze et pour le triangle :

Théorème VII. — *Le quadrilatère formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit à la parabole a une aire nulle.*

En calculant encore l'aire du quadrilatère formé par les pôles des côtés consécutifs du quadrilatère inscrit, on obtient la moitié, prise en signe contraire, de l'aire de ce quadrilatère, et, en appliquant ce résultat au théorème précédent, que nous allons généraliser :

Théorème VIII. — *Le quadrilatère formé par les tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit a une aire nulle.*

(*) *Voir* mon Mémoire ayant pour titre : *Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure* (Extrait du *Bulletin de la Société d'émulation de l'Allier*. Moulins, 1875).

Considérons enfin un polygone de n côtés ABC...HKL, inscrit à la parabole; désignons par a, b, c,..., h, k, l les pôles de AB, BC,..., KL, LA, et admettons la formule

$$abc\ldots hkl = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ABC\ldots HKL}.$$

Ajoutons un sommet M au polygone inscrit, et désignons par l' et m les pôles de LM et MA; le triangle ALM nous donne

$$ll'm = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ALM}.$$

L'addition des seconds membres des deux égalités précédentes donne $-\frac{1}{2}$ ABC...HKLM, et celle des deux premiers nous donne l'aire du polygone $abc\ldots hkl'm$, si l'on remarque, en effet, que les trois points k, l, l' sont en ligne droite, ainsi que les points a, l, m, comme pôles de droites concourantes. De là, la proposition suivante :

Théorème IX. — *L'aire du polygone formé par n tangentes à la parabole est égale à la moitié de l'aire, prise en signe contraire, du polygone qui réunit les points de contact.*

Ce théorème comprend un grand nombre de cas particuliers, en supposant un ou plusieurs côtés du polygone infiniment petits. En supposant que le polygone inscrit se compose d'un arc de parabole et de sa corde, on retrouve ainsi l'aire du segment.

Nous ajouterons, sans démonstration, les deux théorèmes suivants, susceptibles de généralisation, ainsi que les précédents :

Théorème X. — *Si l'on joint les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole, et si l'on prend les milieux des cordes interceptées dans la courbe, l'aire formée par ces trois points est égale à la moitié, prise en signe contaire, de celle du triangle inscrit.*

Théorème XI. — *L'aire du triangle formé par les pôles des droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au quart de celle du triangle inscrit.*

Nous prendrons l'équation de l'hyperbole sous la forme

$$xy = 1,$$

et nous supposerons les axes rectangulaires; mais les formules suivantes s'appliquent à une hyperbole quelconque, en multipliant chaque aire par le sinus de l'angle des asymptotes.

L'aire d'un triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ a pour expression

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \frac{x_2 - x_3}{x_1} \frac{x_3 - x_1}{x_2} \frac{x_1 - x_2}{x_3}.$$

Les coordonnées du pôle Q_3 de la corde $P_1 P_2$ sont données par les formules

$$x = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad y = \frac{2}{x_1 + x_2},$$

et l'aire du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ correspondant au triangle $P_1 P_2 P_3$ est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -2 \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

Si le centre de gravité du triangle inscrit est situé sur l'une des asymptotes, on a, par exemple, pour l'axe des y,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

et la comparaison des deux résultats obtenus ci-dessus nous donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème XII. — *Si sur une hyperbole on prend trois points formant un triangle dont le centre de gravité est situé sur l'une des asymptotes, l'aire du triangle des* *tangentes menées par ces trois points est égale à quatre fois l'aire du triangle inscrit.*

Si le centre de gravité est situé sur la courbe, on a la relation

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 9,$$

ou, par une transformation facile,

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1}\,\frac{x_3 + x_1}{x_2}\,\frac{x_1 + x_2}{x_3} = 8,$$

et la comparaison des deux résultats precédents nous donne encore :

THÉORÈME XIII. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, l'aire du triangle des tangentes aux sommets est égale, en signe contraire, à la moitié de l'aire du triangle inscrit.*

Si nous exprimons que la corde PP_1 est parallèle à la corde P_2P_3, nous obtenons la condition $xx_1 = x_2 x_3$, et, pour le point de contact de la tangente PP parallèle à P_2P_3, nous avons $x = \pm\sqrt{x_2 x_3}$, et ainsi il y a toujours deux solutions réelles si x_2 et x_3 sont de même signe, c'est-à-dire si P_2 et P_3 appartiennent à la même branche d'hyperbole.

Si, dans l'expression de $P_1P_2P_3$, nous remplaçons x_1, x_2, x_3 respectivement par $\frac{x_2 x_3}{x_1}$, $\frac{x_3 x_1}{x_2}$, $\frac{x_1 x_2}{x_3}$, nous obtenons

$$-\,P_1P_2P_3\,\frac{x_2 + x_3}{x_1}\,\frac{x_3 + x_1}{x_2}\,\frac{x_1 + x_2}{x_3},$$

et, par suite, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME XIV. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, et* *si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.*

THÉORÈME XV. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur l'une des asymptotes, et si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent la courbe en trois nouveaux points, formant un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.*

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit $P_1 P_2 P_3 P_4$; l'aire de ce quadrilatère a pour expression, en opérant comme dans le cas de la parabole,

$$\tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)\left(\frac{1}{x_1 x_3} - \frac{1}{x_2 x_4}\right).$$

Si nous remplaçons dans cette formule x_i par $+\sqrt{x_i x_{i+1}}$, qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à $P_i P_{i+1}$, en supposant tous les points situés sur la même branche d'hyperbole, et si nous remarquons que le dernier facteur du résultat précédent s'annule, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Le quadrilatère formé dans une même branche d'hyperbole par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit dans cette branche a une aire nulle.*

Ce théorème, que nous avons déjà rencontré dans la parabole, est également vrai pour le cercle et, par suite, pour l'ellipse, en prenant tous les points de contact sur la même demi-circonférence, ainsi qu'on le démontre immédiatement pour le cercle en faisant voir que les deux triangles dont se compose le quadrilatère sont égaux.

Les théorèmes sur l'hyperbole paraissent moins nombreux que les théorèmes correspondants sur la parabole, à cause de la condition imposée au centre de gravité du triangle; mais, puisque l'une et l'autre des deux conditions sont homogènes et symétriques, on peut remplacer x_i par Kx_i, quelle que soit la valeur de K, et en particulier $K = 2$. On peut aussi augmenter le nombre des résultats précédents à l'aide des remarques suivantes.

Si, par un point $x = a$ de l'hyperbole, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points ayant pour abscisses $\frac{x_2 x_3}{a}$, $\frac{x_3 x_1}{a}$, $\frac{x_1 x_2}{a}$, et, si l'on porte ces valeurs dans les expressions de $P_1 P_2 P_3$ et de $Q_1 Q_2 Q_3$, on retrouve les aires des triangles avec des signes contraires. En portant ces valeurs dans la condition qui exprime que le centre de gravité du triangle $P_1 P_2 P_3$ est situé sur la courbe, on retrouve cette même condition. Enfin il est facile de voir que, si le centre de gravité du triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ est situé sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du nouveau sera situé sur l'autre. Donc :

Théoreme XVII. — *Si, par un point d'une hyperbole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale, en signe contraire, à l'aire du premier; il en est de même des triangles circonscrits correspondants. Enfin, si le centre de gravité du premier triangle inscrit est situé sur la courbe ou sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du second sera situé sur la courbe ou sur l'autre asymptote.*

Les deux premières parties de ce théorème s'appliquent également à un polygone quelconque.

Nous énoncerons encore les propositions suivantes, dont nous laissons au lecteur la vérification :

Théorème XVIII. — *L'aire du triangle obtenu en prenant les milieux des cordes interceptées dans une hyperbole passant par le centre du triangle inscrit, par les droites qui joignent les milieux des côtés de ce triangle, est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XIX. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant par le centre du triangle, on mène des parallèles à la tangente passant au centre du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XX. — *Si, par le centre d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XXI. — *Par le centre d'un triangle inscrit à une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit, et, par les points d'intersection de ces parallèles avec l'hyperbole, on mène des tangentes à la courbe, l'aire du triangle formé par ces tangentes est égale, en signe contraire, à l'aire du triangle inscrit.*

Nous ferons remarquer que la plupart de ces théorèmes sont susceptibles d'une grande généralisation, et s'appliquent indistinctement à toutes les coniques, mais en tenant compte de la restriction indiquée au théorème XVI pour le cas du cercle; nous citerons notamment à ce sujet les théorèmes V et VI. On peut d'ailleurs arriver plus rapidement à ces résultats et déduire les théorèmes de l'hyperbole de ceux qui concernent la parabole, et réciproquement. Nous donnerons enfin, dans un prochain travail, les théorèmes correspondants dans la Géométrie à trois dimensions.