

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 182-189

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__182_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSEES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 111

(voir 1^{re} série, t. V p. 106).

PAR M. H. BROCARD.

Soient M un point pris sur une courbe plane et MO le rayon de courbure en ce point. Considérons M comme

l'extrémité du petit axe d'une ellipse ayant en ce point même rayon de courbure MO : quel est le lieu des foyers de cette ellipse? (LANCREF.)

Soient $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse osculatrice, R le rayon de courbure au point M . Prenons ce point pour origine, la tangente et la normale pour axes de coordonnées.

Nous aurons, pour le foyer F ,

$$x = b, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2},$$

avec la condition

$$\frac{a^2}{b} = R.$$

L'élimination de a et de b se fait immédiatement, et donne, pour le lieu des foyers, la circonférence

$$x^2 + y^2 - Rx = c,$$

décrite sur OM comme diamètre.

Question 578

(voir 1^{re} série, t. XX, p. 138);

PAR M. H. BROCARD.

Les quatre cercles inscrits dans un triangle sphérique sont touchés par un même cercle. (HART.)

La tangente du rayon sphérique de ce dernier cercle est la moitié de la tangente du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle. (SALMON.)

Supposons tracés, sur un plan P , un triangle rectiligne, ses trois hauteurs, les cercles inscrits, exinscrits, circonscrit, et le cercle des neuf points. Prenons le point de rencontre H des hauteurs pour centre d'une sphère de

rayon quelconque, et l'extrémité O du rayon OH , perpendiculaire au plan P , pour centre d'une projection stéréographique. Au triangle rectiligne correspond ainsi un triangle sphérique, dont les hauteurs ont pour projections les hauteurs du triangle rectiligne. A chaque cercle de la figure plane correspond également un cercle de la figure sphérique, jouissant des mêmes propriétés; mais le cercle des neuf points correspond à un petit cercle de la sphère; ce dernier est donc tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits au triangle sphérique. Ainsi se trouve établie la première proposition.

Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que, si l'on considère le plan tangent P' à la sphère au point O' de rencontre des hauteurs du triangle sphérique, ce point O' est le centre de similitude d'une figure formée par les deux cercles traces de deux cônes ayant pour sommet le point O , et pour bases le cercle circonscrit au triangle rectiligne et le cercle des neuf points. La trace du plan passant par le point O et la ligne des centres de ces deux cercles est une tangente à la sphère, menée par le point O' , et limitée aux deux cercles situés dans le plan P' . Le rapport de similitude n'ayant pas été modifié par cette construction et le rayon du cercle des neuf points étant la moitié de celui du cercle circonscrit, on en conclut que les tangentes des rayons sphériques des cercles correspondants sont dans le même rapport.

Question 1170

(voir 2^e série, t. XIV, p. 240);

PAR M. PRAVAZ.

Démontrer que, dans les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, il est permis de rem-

placer les côtés a, b, c respectivement par

$$a \cos A \cos 2A \dots \cos 2^{n-1}A,$$

$$b \cos B \cos 2B \dots \cos 2^{n-1}B,$$

$$c \cos C \cos 2C \dots \cos 2^{n-1}C$$

et les angles A, B, C par

$$p\pi \pm 2^n A, \quad q\pi \pm 2^n B, \quad r\pi \pm 2^n C,$$

où n désigne un nombre entier et positif quelconque et p, q, r des nombres entiers, dont les valeurs et les signes ne sont pas arbitraires.

On a, par exemple,

$$\pm \cos 2^n C = \frac{(a \cos A \dots \cos 2^{n-1} A)^2 + (b \cos B \dots \cos 2^{n-1} B)^2 - (c \cos C \dots \cos 2^{n-1} C)^2}{2(a \cos A \dots \cos 2^{n-1} A)(b \cos B \dots \cos 2^{n-1} B)}.$$

(J.-W.-L. GLAISHER.)

Les formules fondamentales sont

$$(1) \quad A + B + C = \pi,$$

$$(2) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La première sera satisfaite par la substitution indiquée si l'on a

$$(3) \quad p + q + r \pm 2^n = 1;$$

égalité à laquelle on peut satisfaire par des valeurs entières de p, q, r .

En se bornant à celles-ci, $\sin A$ sera remplacé par $\pm \sin 2^n A$, si p est pair, et par $\mp \sin 2^n A$, si p est impair; de même pour $\sin B$ et $\sin C$.

On a, d'après les formules (2),

$$\frac{a \cos A}{\sin A \cos A} = \frac{b \cos B}{\sin B \cos B} = \frac{c \cos C}{\sin C \cos C}$$

ou

$$\frac{a \cos A}{\sin 2A} = \frac{b \cos B}{\sin 2B} = \frac{c \cos C}{\sin 2C};$$

puis, comme on le démontrerait par le raisonnement dit *de proche en proche*,

$$\begin{aligned} \frac{a \cos A \cos 2A \dots \cos 2^{n-1} A}{\sin 2^n A} &= \frac{b \cos B \cos 2B \dots \cos 2^{n-1} B}{\sin 2^n B} \\ &= \frac{c \cos C \cos 2C \dots \cos 2^{n-1} C}{\sin 2^n C}. \end{aligned}$$

Ces formules se déduisent des formules (2) par les changements indiqués, pourvu que les nombres p, q, r soient tous pairs, ou tous impairs; or, puisque ces nombres doivent satisfaire à l'équation (3), ils ne peuvent être pairs ensemble.

Cette restriction faite, si l'on pose

$$\begin{aligned} a' &= a \cos A \cos 2A \dots \cos 2^{n-1} A, & b' &= \dots, & c' &= \dots, \\ A' &= p\pi \mp 2^n A, & B' &= \dots, & C' &= \dots, \end{aligned}$$

les éléments a', b', c', A', B', C' satisferont aux formules fondamentales de la Trigonométrie rectiligne et, par suite, à toutes celles qui s'en déduisent.

Note. — La même question a été résolue par MM. de Virieu et Moret-Blanc.

Question 1187

(VOIR *REVUE*, t. XLI, p. 281,)

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie.

Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0,$$

dans laquelle la quantité $-4p^3 - 27q^2$ est égale à un carré r^2 , on sait que la différence entre deux racines

quelconques de cette équation est exprimable par une fonction entière de la troisième racine, fonction qui est du second degré et dont les coefficients sont exprimés rationnellement au moyen des quantités connues p , q , r .

On propose, réciproquement, d'exprimer l'une quelconque des racines par une fonction entière du second degré de la différence entre les deux autres racines, les coefficients de cette fonction devant, de même, être exprimés rationnellement au moyen de p , q , r .

(S. REALIS.)

Soient a une racine de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

et $V = b - c$ la différence des deux autres racines ; on sait qu'en posant

$$r^2 = -4p^2 - 27q^2,$$

on a

$$(1) \quad V = \frac{1}{r} (6pa^2 - 9qa + 4p^2).$$

d'autre part, les relations

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = p$$

donnent

$$(b + c)^2 = a^2, \quad 4bc = 4a^2 + 4p;$$

d'où, par soustraction,

$$(2) \quad (b - c)^2 = V^2 = -3a^2 - 4p.$$

Cela posé, si l'on ajoute membre à membre les équations (1) et (2), après les avoir multipliées respectivement par r et par $2p$, il vient

$$rV + 2pV^2 = -9qa - 4p^2,$$

et l'on tire de là, pour l'expression de la racine a , en

fonction de V ,

$$a = -\frac{1}{9q}(2pV^2 + rV + 4p^2).$$

Remarque I. — On peut, de la manière suivante, arriver facilement à l'équation (1).

En multipliant par r^2 la valeur (2) de V^2 , on a

$$r^2V^2 = (4p^3 + 27q^2)(3a^2 + 4p^2);$$

si maintenant on ajoute au second membre de cette équation la quantité nulle

$$36p^2(a^4 + pa^2 + qa) - 108pq(a^3 + pa + q),$$

on reconnaît qu'il devient égal au carré de l'expression

$$(6pa^2 - 9qa + 4p^2).$$

Remarque II. — La question 1187 est un cas particulier d'une propriété plus générale, qui peut s'énoncer ainsi : Si une fonction V de la racine a d'une équation algébrique de degré m peut se mettre sous la forme

$$A_0 a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + \dots + A_{m-1},$$

(et c'est ce qui arrive pour une fonction rationnelle quelconque), réciproquement, a sera exprimable en fonction entière de degré $m - 1$ de V , fonction dont les coefficients dépendront rationnellement de A_0, A_1, \dots, A_{m-1} et des coefficients de l'équation proposée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Sondat, Barisien, Moret-Blanc, Pravaz.

Question 1190

(voir 2^e série, t. XIV, p. 96);

PAR M. R.-W. GENESE,

M. A. du collège Saint-Jean, à Cambridge.

Démontrer que la formule

$$1 - \frac{2^3 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

a pour valeur -1 ou $+1$, selon que n est un nombre impair ou un nombre pair. (S. REALIS.)

On sait que, si m est un nombre pair,

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos m\Phi &= 1 - \frac{m^2}{2} \cos^2 \Phi + \frac{m^2 (m^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 \Phi \\ &\quad - \frac{m^2 (m^2 - 2^2) (m^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cos^6 \Phi + \dots \end{aligned}$$

En faisant $\Phi = 0$ et $m = 2n$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} (-1)^n &= 1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\quad - \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2) (2^2 n^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots, \\ &= 1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\quad - \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots, \end{aligned}$$

dont le second membre a pour valeur -1 ou $+1$, selon que n est un nombre impair ou un nombre pair.

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Lévy, ancien élève de l'École Polytechnique, J. de Virieu, professeur à Lyon, Bourguet, Moreau, De Cuerne, Lucas.