

PAUL TERRIER

Quadrilatères et sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 108-114

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__108_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUADRILATÈRES ET SECTIONS CONIQUES;

PAR M. PAUL TERRIER,

Ingénieur à Paris.

[SUITE (*).]

THÉORÈME XXVI. — *Si l'on désigne par λ, μ, ρ les sommets du triangle des alignements d'un quadrilatère quelconque (voir théorème VII); par K, H, L les sommets homologues du triangle diagonal; par x, u, v les intersections des côtés homologues des deux triangles sur l'axe d'homologie, on a, entre les douze segments de droites qui joignent les six sommets aux trois intersections, la relation*

$$\frac{xL \times x\rho}{uL \times u\rho} \times \frac{uK \times u\lambda}{vK \times v\lambda} \times \frac{vH \times v\mu}{xH \times x\mu} = 1.$$

Cette relation est de même forme que celle donnée par Carnot, dans le cas d'un triangle coupé par une conique.

THÉORÈME XXVII. — *Si, de chacun des quatre sommets d'un quadrilatère simple quelconque Δ , on abaisse des perpendiculaires sur la diagonale et sur les deux côtés qui ne passent pas par le sommet considéré :*

1° *Les pieds de ces perpendiculaires, prises par*

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIV, p. 514.

groupes de trois, issues d'un même sommet, déterminent quatre triangles semblables

2° Les circonférences circonscrites à ces quatre triangles ont une intersection commune δ .

3° Leurs secondes intersections deux à deux, au nombre de six, sont situées sur les quatre côtés et sur les deux diagonales du quadrilatère A , aux points mêmes où ces six droites, considérées comme diagonales de l'un des trois quadrilatères qui ont les quatre sommets donnés de A , reçoivent les concours fournis par les diagonales respectivement correspondantes.

4° Ces secondes intersections sont les six centres d'homologie deux à deux des quatre triangles semblables (1°) fournis par les quatre sommets du quadrilatère A .

5° Les deux droites qui joignent les concours fournis par chaque diagonale sur l'autre et sur l'axe radical se coupent au point δ .

6° Les centres des circonférences circonscrites aux quatre triangles semblables sont les sommets d'un second quadrilatère A_1 , semblable au quadrilatère donné A .

7° Les diagonales de ce second quadrilatère se coupent sur la médiane du premier.

THÉORÈME XXVIII. — Si, par le point de rencontre des diagonales intérieures du second quadrilatère A_1 , on décrit une circonférence passant par le point de commune intersection δ (théorème précédent), cette nouvelle circonférence passe aussi :

1° Par le point d'intersection des diagonales intérieures de A ;

2° Par les extrémités de la corde commune aux circonférences décrites sur les diagonales de A comme diamètres ;

3° Par les concours que les diagonales intérieures de A fournissent réciproquement l'une sur l'autre ;

4° Par le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère formé par la droite qui joint ces deux concours et par les trois diagonales de A .

Les deux couples de quadrilatères croisés, ayant mêmes sommets que les quadrilatères simples A et A_1 , donnent des résultats analogues, d'où l'on déduit les conséquences suivantes :

Corollaires. — 1° Les deux circonférences ayant leurs centres aux sommets extérieurs de A_1 et passant au point δ passent aussi, respectivement, aux sommets extérieurs homologues de A , et coupent les couples de côtés opposés qui déterminent ces sommets aux mêmes points que les secondes intersections deux à deux des quatre circonférences précédemment considérées (théorème XXVII, 2° et 3°) ;

2° Les sept circonférences ayant leurs centres aux six sommets et au point d'intersection des diagonales intérieures de A_1 , et passant par le point δ , se coupent trois à trois sur les quatre côtés et sur les diagonales intérieures de A , aux points où ces six droites, prises comme diagonales de l'un des trois quadrilatères ayant mêmes sommets que A , reçoivent respectivement le concours de la diagonale correspondante.

Définitions. — Nous appelons *cercle radical* du quadrilatère A le cercle qui a son centre à l'intersection des diagonales de A_1 et qui passe par les sept points remarquables déterminés au théorème précédent.

Chacune des quatre circonférences (théorème XXVII, 2°) d'intersection commune δ sur le *cercle radical* a même diamètre qu'une conique dont l'un des foyers est au sommet correspondant du quadrilatère A . Dans le cas limite du quadrilatère inscrit, les quatre coniques sont

des paraboles et les quatre circonférences se réduisent aux *quatre droites de Simson*, d'intersection commune (théorème XIV) sur l'axe radical. Le *cercle radical* a son centre à l'infini, sur la médiane du quadrilatère donné, et se confond avec l'axe radical. Cet axe est donc, dans le quadrilatère inscrit, une position particulière du cercle radical, et le centre perspectif α , dans le même cas, est une position particulière du point d'intersection δ , qu'on peut appeler par extension *centre perspectif* du quadrilatère quelconque.

On voit d'ailleurs que la propriété connue du quadrilatère inscrit, à savoir que les diagonales intérieures se coupent sur l'axe radical, est le cas particulier d'une propriété plus générale du quadrilatère quelconque, puisque les diagonales de ce quadrilatère se coupent sur son cercle radical.

Nous rappelons la propriété suivante, énoncée sous une autre forme par Steiner :

Les centres des circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par quatre droites, prises trois à trois, sont les sommets d'un quadrilatère inscritible dans une circonférence qui passe par le foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

THÉORÈME XXIX. — *Les côtés et les diagonales du quadrilatère des centres coupent respectivement à angles droits, et en leurs milieux, les droites qui joignent les six sommets du quadrilatère formé par les quatre droites données au foyer de la parabole inscrite à ce quadrilatère.*

Corollaires. — 1° Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur les côtés, et diagonales du quadrilatère des centres, sont les six sommets d'un quadrilatère homothétique du quadrilatère donné

(rapport = $\frac{1}{2}$). Le centre d'homothétie est au foyer de la parabole.

2° Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par les sommets trois à trois du quadrilatère des centres, et les centres perspectifs des quatre quadrilatères inscrits formés par les côtés trois à trois du quadrilatère donné et par le foyer de la parabole inscrite, pris comme quatrième sommet commun, se confondent deux à deux sur la directrice de la parabole.

THÉORÈME XXX. — *Les centres des circonférences circonscrites aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère inscrit, pris trois à trois, sont les sommets d'un trapèze isocèle inscrit dans une circonférence qui passe par le foyer de la parabole inscrite et par le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère donné.*

Le quadrilatère des centres est un rectangle lorsque l'une des diagonales du quadrilatère inscrit passe par le centre du cercle circonscrit.

THÉORÈME XXXI. — *Les deux circonférences circonscrites, l'une au quadrilatère donné, l'autre au trapèze des centres, ont pour corde commune un segment de l'axe radical du quadrilatère donné.*

THÉORÈME XXXII. — *La droite (perpendiculaire à la diagonale extérieure) qui joint le foyer de la parabole inscrite au centre du cercle circonscrit, est l'axe radical de deux circonférences qui ont respectivement leurs centres à l'intersection des diagonales et à l'intersection des côtés non parallèles du trapèze des centres, et dont chacune passe par les extrémités d'une diagonale du quadrilatère donné.*

L'axe radical du quadrilatère et celui des circonfé-

rences considérées ont même intersection que les diagonales du quadrilatère.

THÉORÈME XXXIII. — *Le point de rencontre des hauteurs du triangle qui a pour sommets les centres des circonférences circonscrites à trois des quatre triangles formés par quatre droites, prises trois à trois, est situé sur celle des quatre droites qui entre comme côté dans les trois triangles considérés.*

THÉORÈME XXXIV. — *Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par deux côtés adjacents et une diagonale du quadrilatère des centres A_1 , d'un quadrilatère donné A , sont les sommets d'un troisième quadrilatère A_2 , égal et symétrique de A_1 (propriété connue), et de plus inscrit dans le quadrilatère donné A .*

THÉORÈME XXXV. — *Deux sommets quelconques de A_1 , les deux sommets antihomologues de A_2 et le sommet de A , déterminé par les côtés passant aux sommets considérés de A_2 , sont cinq points situés sur un cercle égal aux cercles circonscrits à A_1 et à A_2 .*

Corollaire. — Les sommets de A_1 , pris deux à deux, donnent six combinaisons et déterminent six cercles égaux, dont chacun passe par l'un des sommets de A .

Les centres des quatre cercles déterminés par deux sommets consécutifs de A_1 sont les sommets d'un parallélogramme dont les diagonales se coupent au *centre perspectif* commun aux quadrilatères A_1 , A_2 , et dont les côtés sont parallèles aux diagonales de ces quadrilatères.

Les centres des deux cercles déterminés par les couples de sommets opposés de A_1 sont symétriquement placés, par rapport au centre perspectif, sur une droite parallèle aux médianes de A_1 et de A_2 .

THÉORÈME XXXVI. — *Les quatre triangles formés*

par les côtés trois à trois de Δ , et les quatre autres triangles respectivement inscrits aux premiers, formés par les quatre sommets trois à trois de Δ_2 , sont semblables et homologues deux à deux.

Leurs quatre centres d'homologie sont situés sur la circonférence circonscrite au quadrilatère des centres.