NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 66-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__66_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 99

(voir 1re série, t. IV, p. 370);

PAR M. H. BROCARD.

Soient un hyperboloïde, son cône asymptote et un plan principal commun. Tout plan, tangent à l'hyperboloïde, perpendiculaire au plan principal, retranche *du cône asymptote un cône fermé, de volume constant. Démontrer le théorème général dont celui-ci est un corollaire.* (TERQUEM.)

Le théorème général à établir est le suivant :

L'enveloppe d'un plan mobile qui détache d'un cône quelconque du second degré un cône fermé, de volume constant, est un hyperboloïde à deux nappes admettant le cône donné pour cône asymptote.

L'équation du cône rapporté à ses axes principaux étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

celle du plan variable est

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta,$$

α, β, γ désignant les cosinus des angles que fait la normale au plan avec les axes, et δ la distance de l'origine à ce plan. Éliminant z, on a la projection de la conique d'intersection sur le plan des xy

$$(a^2y^2+b^2x^2)\,c^2\gamma^2=a^2b^2(\delta-\alpha x-\beta y)^2,$$

dont la surface a pour expression

$$\mathrm{A}=\frac{2\pi abc\,\delta^2\gamma}{(c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, comme le cosinus de l'angle du plan sécant avec le plan des xy est γ, l'ellipse de section a pour surfaoe $\dfrac{\mathrm{A}}{\gamma}$. Mais la hauteur du cône détaché est égale à δ ; le volume de ce cône est donc

$$\mathrm{V}=\frac{2\pi abc\,\delta^3}{3(c^2\gamma^2-a^2\alpha^2-b^2\beta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi abc\,k^3}{3},$$

5.

d'où

$$\delta = k\sqrt{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}.$$

On a donc à chercher l'enveloppe du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = k\sqrt{c^2\gamma^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2},$$

sous la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Sous cette forme d'équation, on reconnaît que ce plan est tangent à l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \sqrt{k},$$

dont le cône asymptote n'est autre que le cône donné.

Questions 767 *et* 768

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 383);

PAR M. E. PELLET.

767. *Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.*

(FOURET.)

768. *Étant donnée une conique et un point dans son plan, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle circonscrit à cette conique et tel que les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent au point donné; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les centres analogues ont le même centre radical.*

Le lieu de leurs centres est une conique. Leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre.

(FOURET.)

Ces deux questions sont des conséquences d'un théorème très-général qui, je crois, n'a pas été remarqué (*). D'après un théorème de M. Faure, les cercles circonscrits aux différents triangles conjugués à une conique coupent orthogonalement le cercle diagonal de cette conique, c'est-à-dire le cercle lieu des angles droits circonscrits à cette conique. Transformons la conique et les triangles par polaires réciproques, en prenant pour conique de référence un cercle situé dans le plan de la conique, et les cercles par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle le centre du cercle de référence et pour module de transformation le carré du rayon de ce cercle. Nous aurons ce théorème :

D'un point O, *pris dans le plan d'une conique, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué à cette conique; le cercle passant par les pieds de ces trois perpendiculaires et les cercles analogues ont le même centre radical. On l'obtiendra aisément en abaissant du point* O *des perpendiculaires sur deux diamètres conjugués et menant la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires et les droites analogues : elles passent toutes par ce centre radical.*

On a évidemment le théorème analogue pour l'espace :

D'un point O *quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un tétraèdre conjugué à une surface du second ordre; la sphère passant par les pieds de ces quatre perpendiculaires et les sphères analogues ont le même centre radical. On l'obtiendra aisément en abaissant du point* O *des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués et menant le plan qui*

(*) *Voir* 1re série, t. XX, p 80, et 2e série, t. VI, p. 466.

passe par les pieds de ces perpendiculaires et les plans analogues : ils passent tous par ce centre radical.

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé concourent en un même point. Si l'on fait varier le triangle de manière que ce point-là soit fixe, ses sommets resteront sur une conique. En effet, on peut projeter la figure de manière qu'à la conique corresponde un cercle, et au point donné le centre du cercle; alors le triangle se projettera suivant un triangle équilatéral circonscrit. L'équation du cercle étant $x^2+y^2-z^2=0$, les sommets du triangle équilatéral parcourront le cercle $x^2+y^2-4z^2=0$. On voit immédiatement que ce triangle restera toujours conjugué au cercle $x^2+y^2+2z^2=0$. Revenant à la figure primitive, on voit que les sommets du triangle parcourront une conique bitangente à la première, et que le triangle restera conjugué à une conique bitangente aux deux premières. En disposant convenablement le triangle de référence, les équations des coniques pourront s'écrire

$$x^2+y^2+z^2=0,$$
$$x^2+y^2+4z^2=0,$$
$$x^2+y^2-2z^2=0.$$

On a le théorème analogue pour les surfaces du second degré.

Les tétraèdres circonscrits à une surface du second degré, et tels que les droites qui joignent chaque sommet au point de contact de la face opposée se coupent en un même point donné, ont leurs sommets situés sur une surface du second degré circonscrite à la première, et sont conjugués à une autre surface. Si l'on prend pour tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué à la première surface et ayant un de ses sommets au point donné, les équations de ces surfaces pourront s'écrire, en prenant pour face $t=0$ celle qui est opposée au point donné

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+t^2&=0,\\ x^2+y^2+z^2+9t^2&=0,\\ x^2+y^2+z^2-3t^2&=0. \end{aligned}$$

En rapprochant ces divers théorèmes, on a le suivant :

Si un triangle se meut en restant tangent à une conique, et de manière que les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé se coupent en un point donné : 1° les circonférences qui lui sont circonscrites coupent orthogonalement une même circonférence, et par suite ont pour enveloppe une courbe anallagmatique; 2° il en est de même des cercles qui passent par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné du plan sur les côtés du triangle.

Et le théorème analogue pour l'espace.

Question 932

(voir 2e série, t. VIII, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

Le lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, construits sur les rayons de courbure d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire et d'un même côté de ces rayons de courbure, est une épicycloïde (cycloïde) allongée ou raccourcie. (FOURET.)

Soient m un point de l'épicycloïde; c la position correspondante du centre du cercle mobile; O le centre du cercle fixe; n le point de contact de ces deux cercles; a et r

leurs rayons; $m\mu$ le rayon de courbure de l'épicycloïde au point m, et $m\mu m'$ le triangle semblable au triangle donné construit sur $m\mu$ (*).

Le point n divisant $m\mu$ dans un rapport constant $\left(\frac{mn}{m\mu} = \frac{a + \frac{1}{2}r}{a + r}\right)$, le triangle mnm' est constamment semblable à un triangle déterminé, que je désignerai par MNM'.

Sur cn, construisons le triangle cnc' semblable à mnm' ou à MNM', et joignons $c'm'$. Les deux triangles ncm, $nc'm'$ ayant un angle égal en n, compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et comme

$$cm = cn,$$

on a aussi

$$c'm' = c'n,$$

valeur constante; de plus

$$\widehat{c'm', c'n} = \widehat{cnc'} = \widehat{mnm'} = \widehat{\mathrm{MNM}'},$$

valeur aussi constante. Ainsi l'on obtiendra le point m' en menant par le point c' une droite de longueur constante $c'm' = c'n = cn\,\frac{\mathrm{NM}'}{\mathrm{NM}}$, faisant avec cm un angle égal à MNM', dans un sens déterminé.

Cela posé, menons nn' parallèle à cc', qui coupe $\mathrm{O}c'$ au point n', et des points O et c' avec $\mathrm{O}n' = r'$ et $c'n' = a'$ pour rayons décrivons deux circonférences. Supposons le point m' lié invariablement à la circonférence c', et faisons rouler les circonférences c et c' sur les cercles fixes $\mathrm{O}n$ et $\mathrm{O}n'$ avec des vitesses telles que l'angle $n\mathrm{O}n'$ reste constant. Soient c_1, n_1, m_1, c'_1, n'_1, m'_1 les positions des points c, n, m, c', n', m' quand les rayons $\mathrm{O}n$,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

On' ont tourné d'un angle $nOn_1 = n'On'_1 = \varphi$. Les deux circonférences mobiles auront tourné du même angle $\frac{r}{a}\varphi = \frac{r'}{a'}\varphi$; par suite, les lignes correspondantes $c_1 m_1$, $c'_1 m'_1$ feront entre elles un angle constant égal à MNM'. Le point m'_1 coïncidera donc encore avec le sommet d'un triangle semblable à MNM' construit sur $m_1 n_1$: donc le lieu de ce sommet est l'épicycloïde allongée ou raccourcie (suivant que $c'm'$ ou $c'n$ est plus grand ou plus petit que a'), décrite par le point m' lié invariablement à la circonférence c', roulant sur la circonférence de rayon On'.

Pour une cycloïde, on construira, comme précédemment, le triangle cnc' semblable à MNM', on mènera $c'n'$ égale et parallèle à cn, et par n' une parallèle $x'y'$ à la droite xy sur laquelle roule la circonférence c.

Le lieu du point m' sera la cycloïde allongée ou raccourcie décrite par le point m', lié invariablement à la circonférence c' roulant sur $x'y'$ avec la même vitesse que c roule sur xy : la démonstration est la même.

Question 1046

(voir 2e série, t. X, p. 507),

PAR M. MORET-BLANC.

Tout nombre premier $p = 8q + 1$ prend d'une seule manière chacune des deux formes

$$p = x^2 + 16y^2, \quad p = t^2 + 8u^2.$$

Pour q impair, ou $p = 16r + 9$, des deux nombres y et u, l'un est pair, l'autre impair.

Pour q pair, ou $p = 16r + 1$, les nombres y et u sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(LEBESGUE.)

Je m'appuierai sur ce théorème de la théorie des nombres : *Tout diviseur de l'expression* $t^2 + au^2$, *dans laquelle* t *et* u *sont des nombres premiers entre eux, est compris dans la forme quadratique*

$$py^2 + 2qyz + rz^2,$$

où l'on a

$$pr - q^2 = a, \quad 2q \leq \frac{p}{r},$$

y et z étant d'ailleurs premiers entre eux.

Si $a = 1$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = 1$.

Si $a = 2$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = 2$.

Si $a = -2$, on a nécessairement $q = 0$, $p = 1$, $r = -2$, ou $q = 0$, $p = 2$, $r = -1$.

Il en résulte que tout diviseur de l'une des expressions

$$t^2 + u^2, \quad t^2 + 2u^2, \quad t^2 - 2u^2 \quad (\text{ou } 2t^2 - u^2)$$

est de même forme que le dividende, car les deux formes

$$y^2 - 2z^2 \quad \text{et} \quad 2y^2 - z^2$$

sont équivalentes. En effet

$$y^2 - 2z^2 = 2(y - z)^2 - (y - 2z)^2.$$

Cela posé, p étant un nombre premier, l'expression $x^{p-1} - 1$ ou $x^{8q} - 1$ est divisible par p pour toutes les valeurs entières de x non multiples de p, et en particulier pour les $8q$ nombres entiers compris entre zéro et p (*théorème de Fermat*). Or

$$x^{8q} - 1 = (x^{4q} + 1)(x^{4q} - 1),$$

et comme il n'y a pas plus de $4q$ nombres entre zéro et p qui puissent rendre l'un des facteurs divisible par p, il y en a précisément $4q$ qui rendent $x^{4q} + 1$ divisible par p.

Pour l'une de ces valeurs, $x^{4q}+1$ étant la somme de deux carrés premiers entre eux, son diviseur p sera de la même forme, et l'on aura

$$p = x^2 + z^2,$$
$$x^{4q} + 1 = (x^{2q} - 1)^2 + 2x^{2q},$$

de la forme $t^2 + 2v^2$; donc p sera de la même forme, et l'on aura

$$p = t^2 + 2v^2.$$

On sait qu'un nombre premier ne peut prendre que d'une seule manière la forme $y^2 + az^2$, a étant un nombre positif (Legendre, *Théorie des nombres*, n° 236); donc on aura d'une seule manière

$$p = x^2 + z^2 = t^2 + 2v^2.$$

x^2 et t^2 étant des carrés impairs, de la forme $8q+1$, z^2 et $2v^2$ devront être divisibles par 8, et l'on aura

$$z^2 = 16y^2, \quad v^2 = 4u^2,$$

d'où

$$p = x^2 + 16y^2 = t^2 + 8u^2;$$

x sera de la forme $8m \pm 3$, si q est impair, et de la forme $8m \pm 1$, si q est pair.

Dans tous les cas, on aura

$$(1) \qquad (x+t)(x-t) = 8(u^2 - 2y^2).$$

Premier cas : $p = 16r + 9$, $x = 8m \pm 3$.

1° Soit $t = 8n \pm 1$, la relation (1) devient

$$8(m \mp n)[8(m \pm n) \pm 6] = 8(u^2 - 2y^2)$$

ou

$$2(m \mp n)[4(m \pm n) \pm 3] = u^2 - 2y^2.$$

Les signes placés entre m et n se correspondent ainsi que ceux qui précèdent le terme numérique; mais les premiers sont indépendants des seconds, et *vice versâ*.

Je ferai remarquer d'abord qu'aucun des facteurs du premier membre ne peut être de la forme $8m \pm 3$. En effet, on peut écrire

$$u^2 - 2y^2 = 2^\mu (2k+1)^2 (u_1^2 - 2y_1^2),$$

2^μ étant le produit de tous les facteurs 2, et $(2k+1)^2$ le produit de tous les facteurs impairs *communs* à u^2 et à y^2, et u_1, y_1 des nombres premiers entre eux.

$u_1^2 - 2y_1^2$ n'admet que des diviseurs de la même forme quadratique, et, par suite, de la forme linéaire $8m \pm 1$.

Si l'un des facteurs du premier membre, par exemple le facteur entre crochets, était de la forme $8m \pm 3$, il devrait renfermer à la première puissance $2k+1$, ou l'un de ses diviseurs, qui devrait dès lors diviser aussi l'autre facteur $(m \mp n)$; mais alors ce diviseur diviserait u, y, $x+t$, $x-t$, et, par suite, x et t; ce qui est impossible, puisque x et y sont premiers entre eux, ainsi que t et u.

Donc m et n devront être l'un pair et l'autre impair; $u^2 - 2y^2$ sera divisible par 2, mais non par 4 : donc u *est pair et* y *impair*.

2° Soit $t = 8n \pm 1$, on aura

$$[8(m \pm n) \pm 4][8(m \mp n) \pm 2] = 8(u^2 - 2y^2)$$

ou

$$[2(m \pm n) \pm 1][4(m \mp n) \pm 1] = u^2 - 2y^2.$$

D'après la remarque faite plus haut, m et n seront tous deux pairs ou tous deux impairs; les facteurs du premier membre seront impairs, tous deux de la forme $8m+1$ ou tous deux de la forme $8m-1$ (à cause de la correspondance des signes placés devant 1); leur produit sera de la forme $8m+1$, ce qui exige que *u soit impair et y pair.*

Deuxième cas : $p=16r+1$, $x=8m\pm 1$.

1° Soit $t=8n\pm 1$, on aura

$$[8(m\pm n)\pm 2][8(m\mp n)]=8(u^2-2y^2),$$

ou

$$2(m\mp n)[4(m\pm n)\pm 1]=u^2-2y^2.$$

On voit, comme précédemment, que m et n doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs : u^2-2y^2 est donc divisible par 4, et, par suite, *u et y sont pairs.*

2° Soit $t=8n\pm 3$, on aura, en divisant par 8,

$$[4(m\pm n)\mp 1][2(m\mp n)\pm 1]=u^2-2y^2;$$

m et n devront être encore de même parité ; les facteurs du premier membre sont, l'un de la forme $8m+1$, l'autre de la forme $8m-1$; leur produit est de la forme $8m-1$, ce qui exige que *u et y soient impairs.*

Question 1077

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 191);

Par M. MORET-BLANC.

Appelant projections d'un point sur une courbe les pieds des normales abaissées de ce point sur la courbe, on demande :

1° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les droites qui passent par* un *point donné ;*

2° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les circonférences qui passent par* deux *points donnés ;*

3° *Quel est le lieu des projections d'un même point* *sur toutes les paraboles qui passent par* trois *points donnés ;*

4° *Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les coniques qui passent par* quatre *points donnés ;*

5° *Peut-on déduire de la solution de cette dernière question les solutions des questions précédentes ?*

(MANNHEIM.)

1° Le lieu est évidemment la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint le point que l'on projette au point donné.

2° Je prends la droite qui joint les deux points donnés pour axe des x, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite pour axe des y. Soient $2a$ la distance des deux points ; x_0, y_0 les coordonnées du point qu'on projette, et β l'ordonnée du centre de l'une des circonférences.

Les équations de la circonférence et de la normale seront

$$x^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2 + a^2,$$
$$\frac{y - \beta}{x} = \frac{y_0 - \beta}{x_0}.$$

L'élimination de β entre ces deux équations donne l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x - x_0) + 2y(x_0 y - y_0 x) = 0.$$

Si le point qu'on projette est sur l'axe des y, l'équation se réduit à

$$x(x^2 + y^2 - 2y_0 y - a^2) = 0;$$

elle représente l'axe des y, et la circonférence ayant pour centre le point $(0, y_0)$ et passant par les deux points donnés, comme on pouvait le prévoir.

3° Soient A, B, C les trois points donnés, et O le point que l'on projette. Je prends le point A pour origine des coordonnées rectangulaires et la ligne AB pour axe des x. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point C; x_0, y_0 celles du point O et b l'abscisse du point B.

L'équation d'une parabole passant par A, B, C sera

$$(1)\qquad a^2y^2 + 2axy + x^2 - bx - cy = 0,$$

avec la condition

$$(2)\qquad a^2y_1^2 + 2ax_1y_1 + x_1^2 - bx_1 - cy_1 = 0.$$

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) est

$$\frac{2a^2y + 2ax - c}{2ay + 2x - b} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

d'où

$$(3)\ 2a^2y(x - x_0) + 2a[x(x - x_0) - y(y - y_0)] \\ - (2x - b)(y - y_0) - c(x - x_0) = 0.$$

On aura l'équation du lieu des pieds des normales, en éliminant a et c entre ces trois équations, ce qui conduit à une équation du septième degré.

4° Je prends le point que l'on projette pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées des quatre points donnés, et

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx\,cy + 1 = 0$$

l'équation d'une conique passant par ces quatre points.

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) sera

$$\frac{bx + 2cy + e}{2ax + by + d} = \frac{y}{x}$$

si la normale passe par l'origine; d'où

$$2axy + b(y^2 - x^2) - 2cxy + dy - ex = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant

a, b, c, d, e entre les six équations

$$\begin{aligned}
&a x^2 + b xy + c y^2 + dx + ey + 1 = 0,\\
&a x_1^2 + b x_1 y_1 + c y_1^2 + d x_1 + e y_1 + 1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2axy + b(y^2 - x^2) - 2cxy + dy - ex = 0.
\end{aligned}$$

Il suffit d'égaler l'*éliminant* à zéro :

$$\begin{vmatrix}
x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\
x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\
x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\
x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\
x^2 & x_4 y_4 & y_2^4 & x_4 & y_4 & 1\\
2xy & y^2 - x^2 & -2xy & y & -x & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

La courbe est du quatrième degré, et passe par l'origine et par les quatre points donnés.

5° De ce dernier résultat on pourrait déduire les précédents.

Une parabole est une conique tangente à la droite de l'infini ; mais, tandis qu'un cinquième point détermine complétement une conique passant par quatre points donnés, si l'on donne un quatrième point d'une conique passant par trois points et tangente à une droite donnée, il y a deux coniques satisfaisant à ces conditions. L'indétermination d'une parabole dont on donne trois points est donc double de celle d'une conique dont on donne quatre points, et le lieu cherché doit être pour la parabole de degré double de ce qu'il est pour la conique, c'est-à-dire du huitième degré ; mais la droite de l'infini fait évidemment partie du lieu, car le point à l'infini sur chaque parabole est le pied de la normale menée du point donné parallèlement à l'axe. L'équation du lieu doit donc se réduire au septième degré.

Un cercle passant par deux points donnés est une conique passant par ces deux points et par les deux points circulaires de l'infini; la droite de l'infini fait encore partie du lieu, dont l'équation doit se réduire au troisième degré.

Enfin, si l'un des deux points donnés s'éloigne à l'infini, la droite de l'infini devient une solution double, et l'équation du lieu se réduit au deuxième degré. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que le lieu est une circonférence.

Remarque. — Dans le premier, le deuxième et le quatrième cas, le lieu cherché passe par tous les points donnés.

Dans le cas de la parabole, il passera par le point O, si ce point est extérieur au triangle ayant pour sommets les trois autres. Il passera par chacun de ceux-ci, si la perpendiculaire, menée par ce point à la droite qui le joint au point O, ne passe pas entre les deux autres.

Question 1126

(voir 2e série, t. XIII, p. 64);

PAR M. BOURGUET.

Trouver l'enveloppe d'une sphère à une surface du second degré et coupant orthogonalement une sphère de rayon donné. (E. PELLET.)

J'établirai d'abord la proposition suivante :

Toutes les sphères qui se coupent en un point A *et coupent orthogonalement une sphère* O, *de rayon* R, *se coupent en un autre point* A' *situé sur la ligne* OA *et tel qu'on a*

$$OA.OA' = R^2.$$

En effet, $OA.OA' = \overline{OT}^2 = R^2$.

Cela posé, trois sphères tangentes à une surface S, dans le voisinage du point A, coupent orthogonalement une même sphère. Ces trois sphères se coupent en un même point qui a pour limite A, et en un autre point A′ qui, à la limite, se trouve sur la droite OA, et tel que l'on a

$$OA.OA' = R^2.$$

Comme OA est connu, on construira OA′ sans difficulté. Cette équation peut être considérée comme l'équation de la surface cherchée.

La solution analytique est la traduction de la solution géométrique.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de la sphère mobile : son équation sera

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + R^2 = 0. \end{aligned}$$

Entre x_1, y_1, z_1 existe une certaine relation dépendant de la surface directrice $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$. Pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer x, y, z entre les trois équations

$$(1) \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + R^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{x}{\varphi'_{x_1}} = \frac{y}{\varphi'_{y_1}} = \frac{z}{\varphi'_{z_1}}.$$

Les équations (3) indiquent que les deux points d'intersection de trois sphères infiniment voisines sont sur une droite passant par l'origine. Appelons x, y, z les coordonnées d'un des deux points, et x', y', z' les coordonnées de celui qui est sur la surface directrice ; on aura

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho\rho'}{\rho^2}.$$

Les coordonnées des deux points devant satisfaire à l'équation (2), on déduit

$$\rho\rho' - R^2 = 0,$$

qui nous ramène à la même conclusion que la solution géométrique.

Soit $F(x', y', z') = 0$ l'équation de la surface directrice; l'équation de la surface cherchée sera

$$F\left(R^2\frac{x}{\rho^2},\quad R^2\frac{y}{\rho^2},\quad R^2\frac{z}{\rho^2}\right) = 0.$$

Si F représente une surface du second degré, le lieu cherché sera du quatrième degré; l'origine sera un point conique double ou un point isolé, suivant que la surface directrice est infinie ou finie.

Tout plan passant par l'origine et par une génératrice rectiligne de la surface directrice coupe la seconde surface suivant un cercle passant par l'origine. Le point conique de la surface est tangent à un cône homothétique au cône asymptote.

Note. — La même question a été résolue d'une manière analogue par MM. Alfred Rousset et Genty. M. Moret-Blanc a borne son calcul au cas où la surface du second degré touchée est une sphère. Enfin M. V. Hioux a étendu la question en se proposant de trouver d'abord le lieu du centre de la sphère mobile, c'est-à-dire la *déférente* de l'anallagmatique dont la sphère fixe est la directrice.

Question 1129

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. GAMBEY.

Un triangle ABC, *rectangle en* A, *tourne autour d'un axe mené par* B, *parallèlement à* AC. *Calculer ses trois côtés sous la double condition que son péri-*

mètre ait une valeur donnée et que le volume engendré par lui en un tour complet soit maximum.

Soient a, b, c les côtés, et $2p$ le périmètre, qui est donné. Il s'agit de déterminer ces côtés par la condition que le produit bc^2 soit maximum.

Or, des relations connues

$$a + b + c = 2p,$$
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

on déduit facilement

$$b = \frac{2p(p-c)}{2p-c},$$

d'où

$$bc^2 = \frac{2pc^2(p-c)}{2p-c}.$$

Égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à c, il vient

$$c(2c^2 - 7pc + 4p^2) = 0$$

et, par suite,

$$c = 0, \quad c = \frac{p}{4}(7 \pm \sqrt{17}).$$

La racine $c = 0$ répond au minimum de bc^2. La suivante

$$c = \frac{p}{4}(7 - \sqrt{17})$$

répond au maximum cherché.

Quant à la troisième, il faut la rejeter, car on a toujours $c < \frac{2p}{3}$, et *a fortiori*

$$c < \frac{p}{4}(7 + \sqrt{17}).$$

Les valeurs correspondantes de a et b sont

$$a = \frac{3p}{4}(-3 + \sqrt{17}),$$

$$b = \frac{p}{2}(5 - \sqrt{17}),$$

et celle de bc^2

$$bc^2 = \frac{p^3}{4}(71 - 17\sqrt{17}).$$

Note. — Solution analogue de MM. de Marsilly; Launay, instituteur adjoint à Mézières (Ille-et-Vilaine); Paul Henriot, élève du collége Stanislas; Barthe et Souriau, élèves du lycée de Poitiers; Launoy, maître auxiliaire au lycée de Lille; Louis Goulin, élève du lycée du Havre; et A. Monier.

Question 1130

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. CHABANEL.

Etant donnée une courbe plane quelconque et une surface du second degré, trouver les surfaces développables qui, passant par la courbe, ont leur arête de rebroussement sur la surface : l'équation différentielle du premier ordre à laquelle se ramène la solution de ce problème peut toujours s'intégrer par de simples quadratures. (E. LAGUERRE.)

Soit μ un point de l'arête de rebroussement de l'une des surfaces développables cherchées, surface que je désignerai par X. La tangente menée à cette arête, le contact étant en μ, est génératrice de cette surface, et rencontre la courbe plane donnée en m. Par ce point m, on peut mener une infinité de droites tangentes à la surface du second degré donnée; le lieu de ces tangentes est un cône du second degré Σ.

Si l'on fait varier le point μ sur l'arête de rebroussement, à chacune des positions de ce point correspondront une génératrice μm et un cône Σ; considérons deux points μ' et μ'' infiniment voisins l'un de l'autre. Les génératrices $\mu' m'$ et $\mu'' m''$ se rencontreront en l'un des deux points μ' et μ'', en μ'' par exemple ; ce point appartiendra à l'intersection des cônes Σ' et Σ'' et, par suite, à l'enveloppe des cônes Σ. Mais cette enveloppe est tangente au cône Σ'', et, puisqu'elle passe par le point μ'', elle contient la génératrice $\mu'' m''$. Ainsi l'enveloppe des cônes Σ est le lieu des génératrices μm, lieu qui n'est autre chose que la surface développable X. Le problème revient donc à déterminer l'équation de l'enveloppe des cônes Σ circonscrits à la surface du second degré donnée, et dont les sommets sont situés sur la courbe plane aussi donnée.

Je prends pour plan des xy le plan de cette courbe, et je donne aux axes des x et des y des positions telles, que l'équation de la surface du second degré donnée se réduise à

$$(1)\quad S = -Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxz + 2B'yz + 2Cz + D = 0.$$

Soient α et β les coordonnées du point m, et

$$(2)\qquad \beta = \omega(\alpha)$$

l'équation de la courbe plane donnée.

L'équation du cône Σ est

$$\Sigma = [\alpha(Ax + Bz) + \beta(A'y + B'z) + Cz + D]^2 \\ - S(A\alpha^2 + A'\beta^2 + D) = 0,$$

ou bien

$$(3)\qquad \Sigma = l\alpha^2 + m\beta^2 + 2n\alpha\beta + 2p\alpha + 2q\beta + r = 0,$$

l, m, n, p, q, r étant des fonctions indépendantes de α et de β.

En différentiant cette équation par rapport à α et à β, on a

$$(4)\qquad d\alpha(l\alpha + n\beta + p) + d\beta(m\beta + n\alpha + q) = 0,$$

équation que l'on rend homogène en posant

$$\alpha = \alpha' + \frac{qn - pm}{lm - n^2}, \quad \beta = \beta' + \frac{pn - ql}{lm - n^2},$$

et dont on obtient ensuite l'intégrale générale par de simples quadratures.

Soit

$$\varphi(\alpha, \beta, x, y, z, \lambda) = 0 \tag{5}$$

cette intégrale générale.

L'élimination de α et de β entre les équations (2), (3) et (5) donnera l'équation de la surface développable X, qui répond aux conditions générales du problème, cette surface étant particularisée par la valeur donnée à la constante λ.

Questions 1132 *et* 1133

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 207);

PAR M. BOURGUET.

1132. *On donne trois droites quelconques* D_A, D_B, D_C, *un triangle dont les côtés sont* A, B, C *et un point* O *dans le plan de ce triangle.*

Par le point O, *on mène un plan quelconque qui coupe les trois droites données en* a, b, c. *Les plans* (A, a), (B, b), (C, c) *se coupent en un point* m, *dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier le plan qui passe par le point* O. (MANNHEIM.)

1133. *On donne un triangle dont les côtés sont* A, B, C, *un trièdre dont le sommet est un point du plan de ce triangle et un point quelconque* O.

Par le point O, *on mène une transversale quelconque qui coupe les faces du trièdre aux points* a, b, c.

Les plans (A, a), (B, b), (C, c) *se coupent en un* *point m, dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier la transversale qui passe en* O. (MANNHEIM.)

Prenons une droite quelconque MN et cherchons les points d'intersection de cette droite avec la surface. Pour cela, par le point M je mène deux plans (A, a), (B, b); le plan (C, c) correspondant déterminera un point N tel, qu'à un point M correspondra un seul point N.

Réciproquement, étant donné N, cherchons M : pour cela, je fais tourner le plan mobile autour de Oc; les deux plans (A, a), (B, b) correspondants formeront deux faisceaux homographiques, et leur intersection engendrera un cône du second degré et ce sont les intersections de ce cône par la droite MN qui seront le point M. On voit qu'à chaque point N correspondent deux points M; les points d'intersection de MN avec la surface sont ceux qui se correspondent à eux-mêmes : on sait qu'il y en a trois. Donc la surface est du troisième degré. Si le point O est dans le plan du triangle, l'un des trois points sera dans ce même plan, qui fera partie de la surface, et le reste de cette surface sera du second degré. Si l'on fait coïncider les deux plans (A, a), (B, b) avec le plan du triangle, les trois plans se couperont dans le cas général, suivant la droite C : donc les trois côtés du triangle font partie du lieu. Menons par le point O une droite ab coupant les deux droites D_A, D_B; il est évident que l'intersection des deux plans (A, a), (B, b) fera aussi partie du lieu. Ces six génératrices avec trois autres points détermineront la surface. Dans le cas particulier où O est dans le plan du triangle, la surface du second degré est déterminée par les trois dernières génératrices.

CORRÉLATIF. — *Étant donnés trois droites, un plan et un trièdre ayant son sommet dans le plan, par un point du plan et par les trois droites on fait passer trois* *plans qui coupent les arêtes du trièdre aux points a, b, c. L'enveloppe du plan abc est une surface du second degré, inscrite dans le trièdre. Il est facile de construire trois génératrices.*

Solution analogue pour la question 1133.

CORRÉLATIF. — *Étant donnés un triangle, un trièdre ayant son sommet dans le plan du triangle et un plan quelconque, on trace une droite dans ce dernier plan : par cette droite et par les trois sommets du triangle on fait passer trois plans qui coupent les arêtes du triangle aux points a, b, c; l'enveloppe du plan abc est une surface du second degré inscrite dans le tétraèdre.*

Note. — Solutions géométriques analogues de MM. Chabanel, Dewulf et Genty. Solutions analytiques de MM. Gambey, Genty, Lemelle, Marquet et Moret-Blanc.

Question 1135

(voir 2e série, t. XIII, p. 207).

PAR M. BOURGUET.

a et b étant deux nombres entiers quelconques, la fraction

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots 2a(b+1)(b+2)\ldots 2b}{1.2.3\ldots(a+b)}$$

est égale à un nombre entier. (CATALAN.)

Cette question peut se généraliser ainsi : prouver que

$$\frac{\Gamma(ka_1)\Gamma(ka_2)\ldots\Gamma(ka_k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_k)\Gamma(a_1+a_2+\ldots+a_k)}$$

est un nombre entier.

Cela revient à prouver que

$$\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_1}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_2}{p^x}\right)+\ldots+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{ka_k}{p^x}\right)$$

$$\geqq\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_1}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_2}{p^x}\right)+\ldots+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_k}{p^x}\right)+\sum_{x=\infty}^{x=1}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^x}\right),$$

ou, *a fortiori*,

$$\left(\frac{ka_1}{p^x}\right)+\left(\frac{ka_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{ka_k}{p^x}\right)$$

$$\geqq\left(\frac{a_1}{p^x}\right)+\left(\frac{a_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{a_k}{p^x}\right)+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{p^x}\right).$$

Soient $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ la partie entière du quotient de $a_1, \ldots, a_k$ par p^x et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les restes; cela revient à prouver que

$$\left(\frac{k\alpha_1}{p^x}\right)+\left(\frac{k\alpha_2}{p^x}\right)+\ldots+\left(\frac{k\alpha_k}{p^x}\right)\geqq\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}{p^x}\right).$$

Ce qui est évident, puisque le terme le plus grand du premier membre est à lui seul plus grand que le second membre.

C'est une application de la formule de M. Désiré André, donnée dans la 2e série, t. XIII, p. 185.

Note. — Solution analogue de MM. L. Jacques, à Crémone; Moret-Blanc; J. de Virieu, à Lyon.

Question 1136

(voir 2e série, t. XIII, p. 206);

PAR M. MORET-BLANC.

Le nombre entier p étant la somme de quatre carrés entiers, on a

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, positifs ou négatifs, tels que la somme algébrique*

$$2p + P + Q + R + S$$

est égale à un carré, et l'on a aussi

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2,$$

P', Q', R', S' *étant des entiers dont la somme algébrique est égale à p.* (S. REALIS.)

Soit

$$p = r^2 + s^2 + t^2 + u^2.$$

1° Si l'on pose

$$st + tu + su - r^2 = P,$$
$$tu + ru + rt - s^2 = Q,$$
$$ru + rs + su - t^2 = R,$$
$$rs + st + rt - u^2 = S,$$

on aura

$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

et

$$2p + P + Q + R + S = (r + s + t + u)^2.$$

2° Si l'on pose

$$r^2 + st + su + tu = P',$$
$$s^2 - tu + rt - ru = Q',$$
$$t^2 - su + ru - rs = R',$$
$$u^2 - st + rs - rt = S',$$

on aura

$$p^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 + S'^2$$

et

$$P' + Q' + R' + S' = p.$$

Cette dernière solution n'étant pas symétrique, on en déduit trois autres par la permutation circulaire des lettres r, s, t, u.

Il est évident qu'une autre décomposition du nombre p en somme de quatre carrés donnerait d'autres solutions.