PEPIN

Note sur la question 206 (voir 1re série, t. IX, p. 116)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 63-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__63_0>

NOTE SUR LA QUESTION 206

(voir 1re série, t. IX, p. 116);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

Trouver des nombres rationnels qui satisfassent aux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$
$$x^2 + y^2 - 1 = u^2.$$

Si l'on s'en tient à cet énoncé, la solution donnée à l'endroit cité est pleinement suffisante; mais on peut donner à cette question plus d'étendue et demander une méthode qui permette de trouver toutes les solutions rationnelles dont les termes entiers ne dépassent pas une limite assignée. Supposons que les valeurs rationnelles des inconnues réduites au plus petit dénominateur commun soient

$$x = \frac{m}{l}, \quad y = \frac{n}{l}, \quad z = \frac{p}{l}, \quad u = \frac{q}{l};$$

l, m, n, p, q désigneront cinq nombres entiers premiers entre eux. Si l'on multiplie par l^2 les équations proposées et qu'on les combine successivement par addition et par soustraction, on en déduira le système équivalent

$$(1) \qquad 2n^2 = p^2 - q^2,$$

$$(2) \qquad 2(m^2 - l^2) = p^4 + q^2.$$

Soit λ le plus grand diviseur commun des trois nombres n, p, q: l'équation (1) sera résolue de la manière la plus générale par les formules

$$(3) \qquad n = 2\lambda st, \quad p = \lambda(s^2 + 2t^2), \quad q = \lambda(s^2 - 2t^2).$$

L'équation (2) devient ensuite

$$(4) \qquad m^2 - l^2 = \lambda^2(s^4 + 4t^4).$$

Aucun facteur de λ ne peut diviser en même temps les deux nombres m et l, parce qu'alors il serait diviseur commun des cinq nombres l, m, n, p, q, que nous supposons premiers entre eux. D'ailleurs on peut supposer λ pair ou impair. Soit $\lambda = 2\mathrm{MN}$ et $s^4 + 4t^4 = \mathrm{PQ}$; on résoudra l'équation (4) en posant

$$(5) \qquad \begin{cases} m + l = 2\mathrm{M^2P}, & m - l = 2\mathrm{N^2Q}, \\ m = \mathrm{M^2P} + \mathrm{N^2Q}, & l = \mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}. \end{cases}$$

Dans ce cas, l et m seront de même parité ; comme n, p, q sont déjà pairs, il faut que les deux nombres l et m soient impairs.

Soit $\lambda = \mathrm{MN}$ impair ; on aura

$$m + l = \mathrm{M^2P}, \quad m - l = \mathrm{N^2Q},$$

d'où

$$m = \frac{\mathrm{M^2P} + \mathrm{N^2Q}}{2}, \quad l = \frac{\mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}}{2}.$$

Il faut, dans ce cas, que les deux nombres P et Q soient de même parité. Du reste, les solutions des équations proposées sont données dans les deux cas par les formules

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{M^2P} + \mathrm{N^2Q}}{\mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}}, & y = \dfrac{4\mathrm{MN}st}{\mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}}, \\ z = \dfrac{2\mathrm{MN}(s^2 + 2t^2)}{\mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}}, & u = \dfrac{2\mathrm{MN}(s^2 - 2t^2)}{\mathrm{M^2P} - \mathrm{N^2Q}}. \end{cases}$$

Les quatre nombres M, N, s et t ne sont assujettis qu'à la seule condition que les deux nombres M et N soient premiers entre eux, ainsi que les deux nombres s et t. On voit aisément que l'on pourra déduire de ces formules toutes les solutions dans lesquelles le numérateur de y, $\mathrm{LMN}st$ ne surpasse pas une limite assignée. Pour chaque système de valeurs des nombres M, N, s, t qui satisfont à cette condition, on décomposera de toutes les manières possibles le nombre $(s^4 + 4t^4)$ en deux facteurs P et Q, et les formules (6) donneront une solution des équations proposées pour chacune de ces décompositions.

Une partie de ces solutions peut s'exprimer d'une manière générale en fonction des quatre nombres entiers M, N, s, t; il suffit de remplacer dans les équations (6) P et Q par l'un des systèmes de valeurs

$$\begin{aligned} P &= 1, & Q &= s^4 + 4t^4, \\ P &= s^2 + 2t^2 \pm 2st, & Q &= s^2 + 2t^2 \mp 2st. \end{aligned}$$

Les valeurs données par les formules (6) seront entières si les quatre nombres M, N, P, Q vérifient la condition

$$M^2P - N^2Q = \pm 1.$$

On pourra prendre arbitrairement les deux nombres s, t; comme la somme $s^4 + 4t^4$ ne peut jamais être un carré, on pourra toujours trouver une infinité de solutions de l'équation

$$(7) \qquad M^2 - (s^4 + 4t^4)N^2 = \pm 1.$$

Soit, par exemple, $s = t = 1$; on vérifiera l'équation $M^2 - 5N^2 = \pm 1$, en posant $M = 2$, $N = 1$. Les autres solutions se déduiront de la formule

$$M + \sqrt{5}N = (2 + \sqrt{5})^n,$$

en faisant varier n de 1 à ∞. On aura

$$M = \frac{1}{2}\left[(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n\right], \quad N = \frac{(2+\sqrt{5})^n - (2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}.$$

Pour chaque valeur de n, on obtiendra une solution en nombres entiers des équations proposées, savoir

$$(8)\quad x = M^2 + 5N^2,\quad y = 4MN,\quad z = 6MN,\quad u = 2MN.$$

On peut aussi obtenir des solutions entières exprimées d'une manière générale en fonction d'un nombre entier arbitraire. En effet, on vérifie l'équation (7) en prenant $s = 1$, $P = 1$, $Q = 1 + 4t^2$, $M = 2t^2$, $N = 1$. De cette solution, on en déduira une infinité d'autres, où P et Q conservant les mêmes valeurs 1 et $1 + 4t^4$, les valeurs de M et de N seront données par la formule

$$(9)\qquad M + \sqrt{1 + 4t^4}\,N = (2q^2 + \sqrt{1 + 4q^4})^n.$$

Les valeurs $n = 1$, $n = 2$ de l'exposant donnent respectivement les solutions

$$x = 1 + 8t^4,\quad y = 8t^3,\quad z = 4t^2(1 + 2t^2),\quad u = 4t^2(1 - 2t^2),$$

$$x = (8t^2 + 1)^2 + 16t^4(1 + 4t^4),\quad y = 16t^3(1 + 8t^4).$$

$$z = 8t^2(8t^4 + 1)(1 + 2q^2),$$

$$u = 8t^2(8t^4 + 1)(1 - 2t^2).$$

Les formules deviennent de plus en plus compliquées à mesure que l'exposant n prend une valeur plus grande.