NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 563-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__563_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1176

(voir 2e série, t. XIV, p. 288),

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu des points de l'espace tels qu'une conique donnée se projette suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné sur le plan de la conique. (PELLET.)

On sait que, si deux coniques tracées sur une surface du second ordre se coupent, le carré de la demi-corde commune est égal au produit des segments qu'elle intercepte sur le diamètre de chaque conique passant par son milieu multiplié par le carré du rapport du demi-diamètre de la conique parallèle à la corde au demi-diamètre conjugué. Si les coniques ne se coupent pas, le théorème subsiste pour l'intersection de leurs plans et les diamètres conjugués à sa direction, en ce sens que les deux produits, qui étaient égaux au carré de la demi-corde commune, restent égaux entre eux.

Cela posé, soient O un point pris dans le plan d'une conique (C), MN sa polaire, O′ le point où elle est coupée par le diamètre AB de la conique qui passe par le point O. Prenons sur cette polaire, à partir de O′, deux longueurs O′M, O′N, telles que

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'N}^2 = O'A.O'B.\frac{b^2}{a^2},$$

$2a$ et $2b$ désignant le diamètre AB et son conjugué parallèle à MN.

Soit S le sommet d'un cône de projection. La projection du point O sera le centre de la courbe projection de (C), si l'on prend le plan du tableau parallèle au plan (S, MN), car le pôle d'une droite située à l'infini est au centre de la courbe. Pour que la courbe soit un cercle, il faut :

1° Que la droite MN ne rencontre pas le cône, et, par suite, que le point O soit à l'intérieur de la conique (C) ;

2° Que le plan (S, MN) coupe le cône suivant un cercle infiniment petit, et, comme MN sera la direction conjuguée de SO′, il faut que ces deux droites soient rectangulaires, et de plus, en vertu du théorème énoncé plus haut, on aura les relations

$$\overline{O'S}^2 = O'A.O'B\frac{b^2}{a^2} = \overline{O'M}^2,$$

$$O'S = O'M.$$

Le lieu du point S est donc la circonférence décrite du centre O′ avec un rayon $O'S = \frac{b}{a}\sqrt{O'A.O'B}$ dans le plan perpendiculaire à MN (*).

(*) *Voir* Poncelet, *Propriétés projectives des figures*, n° 110.